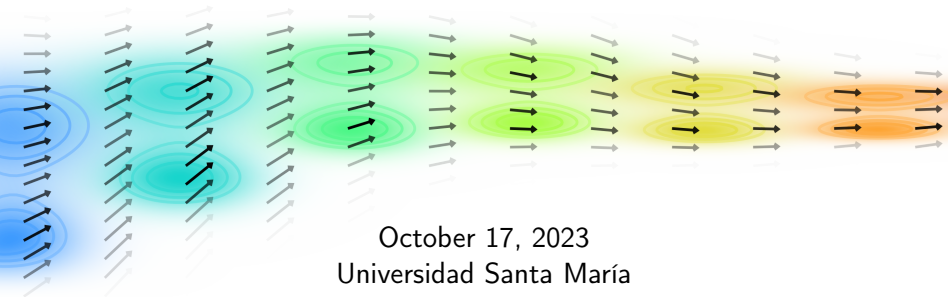


El D en EDP

Estrategías para derivación en espacios de medidas - Capítulo 4

Averil Prost (LMI INSA Rouen)



October 17, 2023

Universidad Santa María

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_W(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

Las semanas pasadas, vimos maneras de definir gradientes de funciones de medidas.

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_W(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

Las semanas pasadas, vimos maneras de definir gradientes de funciones de medidas.

- Juegan el papel de linealización para obtener una representación local.

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_W(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

Las semanas pasadas, vimos maneras de definir gradientes de funciones de medidas.

- Juegan el papel de linealización para obtener una representación local.
- Usan la geometría del espacio subyacente (espacio vectorial, geodesico...)

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_W(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

Las semanas pasadas, vimos maneras de definir gradientes de funciones de medidas.

- Juegan el papel de linealización para obtener una representación local.
- Usan la geometría del espacio subyacente (espacio vectorial, geodesico...)

Hoy vamos a ver que para cierto tipo de ecuación, no es necesario conocer tanta información.

Table of Contents

Definiciones

Compatibilidad de la definición métrica con las previas

Conclusión

Motivación

Consideramos una ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) de "tipo eikonal", es decir

$$-\partial_t u(t, x) + H(x, |\nabla u(t, x)|) = 0, \quad u(T, x) = \mathfrak{J}(x).$$

Motivación

Consideramos una ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) de "tipo eikonal", es decir

$$-\partial_t u(t, x) + H(x, |\nabla u(t, x)|) = 0, \quad u(T, x) = \mathfrak{J}(x).$$

Ejemplos clásicos del Hamiltonian H son

$$H(x, r) = r, \quad H(x, r) = \frac{r^2}{2} - V(x)$$

donde V es un potencial en una interpretación física.

Motivación

Consideramos una ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) de "tipo eikonal", es decir

$$-\partial_t u(t, x) + H(x, |\nabla u(t, x)|) = 0, \quad u(T, x) = \mathfrak{J}(x).$$

Ejemplos clásicos del Hamiltonian H son

$$H(x, r) = r, \quad H(x, r) = \frac{r^2}{2} - V(x)$$

donde V es un potencial en una interpretación física.

- Ecuaciones de moción de frontera o de minimización de camino.

Motivación

Consideramos una ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) de "tipo eikonal", es decir

$$-\partial_t u(t, x) + H(x, |\nabla u(t, x)|) = 0, \quad u(T, x) = \mathfrak{J}(x).$$

Ejemplos clásicos del Hamiltonian H son

$$H(x, r) = r, \quad H(x, r) = \frac{r^2}{2} - V(x)$$

donde V es un potencial en una interpretación física.

- Ecuaciones de moción de frontera o de minimización de camino.
- No es necesario conocer la dirección del gradiente, sólo su norma.

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico.

Def 1 La **pendiente métrica** de una función $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $x \in X$ se define como

$$|Du(x)| := \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - u(x)|}{d(y, x)}.$$

Definición

Sea (X, d) un espacio metrico.

Def 1 La **pendiente métrica** de una función $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $x \in X$ se define como

$$|Du(x)| := \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - u(x)|}{d(y, x)}.$$

También se pueden introducir

$$|D^\pm u(x)| := \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{(u(y) - u(x))_\pm}{d(y, x)}, \quad a_\pm = \max(0, \pm a).$$

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico.

Def 1 La **pendiente métrica** de una función $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $x \in X$ se define como

$$|Du(x)| := \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - u(x)|}{d(y, x)}.$$


También se pueden introducir

$$|D^\pm u(x)| := \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{(u(y) - u(x))_\pm}{d(y, x)}, \quad a_\pm = \max(0, \pm a).$$




Varios trabajos consideran soluciones de viscosidad en espacios métricos, por ejemplo [GNT08, HK15, GŚ15a, GŚ15b, GHN15].

Ejemplos en espacios Euclidianos

Caso suave  Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 , tenemos


$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} \tag{1}$$

Ejemplos en espacios Euclidianos

Caso suave  Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 , tenemos


$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{|\langle \nabla f(x), s \nabla f(x) \rangle|}{|s \nabla f(x)|} + 0 \quad (1)$$

Ejemplos en espacios Euclidianos

Caso suave  Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 , tenemos

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{|\langle \nabla f(x), s \nabla f(x) \rangle|}{|s \nabla f(x)|} + 0 = |\nabla f(x)|. \quad (1)$$

Ejemplos en espacios Euclidianos


Caso suave  Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 , tenemos

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{|\langle \nabla f(x), s \nabla f(x) \rangle|}{|s \nabla f(x)|} + 0 = |\nabla f(x)|. \quad (1)$$

Sea $X = \mathbb{R}^+$ con $d(x, y) = |x - y|$, y la función

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \min \{d(x, 2^{-i}) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplos en espacios Euclidianos

Caso suave  Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 , tenemos

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{|\langle \nabla f(x), s \nabla f(x) \rangle|}{|s \nabla f(x)|} + 0 = |\nabla f(x)|. \quad (1)$$

Sea $X = \mathbb{R}^+$ con $d(x, y) = |x - y|$, y la función

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \min \{d(x, 2^{-i}) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces f es 1-Lipschitz, pero $\lim_{h \searrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}$ no existe. Sin embargo, tenemos

$$|Df(0)| = |D^+ f(0)| = \frac{1}{3}, \quad |D^- f(0)| = 0.$$

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Notamos que

$$|\ell(y) - \ell(x)| \leq |\nabla \ell(x)| |y - x| + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} |y - x|^2.$$

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Notamos que

$$|\ell(y) - \ell(x)| \leq |\nabla \ell(x)| |y - x| + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} |y - x|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz, para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\Omega)$,

$$|\langle \ell, \nu \rangle - \langle \ell, \mu \rangle| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Notamos que

$$|\ell(y) - \ell(x)| \leq |\nabla \ell(x)| |y - x| + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} |y - x|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz, para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\Omega)$,

$$|\langle \ell, \nu \rangle - \langle \ell, \mu \rangle| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Sigue que $|Du(\mu)| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2}$.

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Notamos que

$$|\ell(y) - \ell(x)| \leq |\nabla \ell(x)| |y - x| + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} |y - x|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz, para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\Omega)$,

$$|\langle \ell, \nu \rangle - \langle \ell, \mu \rangle| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Sigue que $|Du(\mu)| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2}$. Por otro lado, a lo largo de $\mu_t := (id + t\nabla \ell) \# \mu$,

$$\langle \ell, \mu_t \rangle - \langle \ell, \mu \rangle = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2} d_{\mathcal{W}}(\mu, \mu_t) - \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \mu_t).$$

Ejemplo lineal suave

Para $X = \mathcal{P}_2(\Omega)$, sea $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Notamos que

$$|\ell(y) - \ell(x)| \leq |\nabla \ell(x)| |y - x| + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} |y - x|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz, para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\Omega)$,

$$|\langle \ell, \nu \rangle - \langle \ell, \mu \rangle| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) + \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Sigue que $|Du(\mu)| \leq \sqrt{\int_{x \in \Omega} |\nabla \ell(x)|^2 d\mu(x)} = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2}$. Por otro lado, a lo largo de $\mu_t := (id + t\nabla \ell) \# \mu$,

$$\langle \ell, \mu_t \rangle - \langle \ell, \mu \rangle = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2} d_{\mathcal{W}}(\mu, \mu_t) - \frac{\|\nabla^2 \ell\|_\infty}{2} d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \mu_t).$$

Concluimos que $|Du(\mu)| = \|\nabla \ell\|_{L_\mu^2}$.

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$$

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = td_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$$

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = td_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t).$$

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = td_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t).$$

Entonces $|Du(\mu)| \equiv 1$.

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = td_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t).$$

Entonces $|Du(\mu)| \equiv 1$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, tenemos

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \mu} \frac{|\varphi(u(\nu)) - \varphi(u(\mu))|}{d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)} = |\varphi'(u(\mu))| |Du(\mu)| + 0 = |\varphi'(u(\mu))|.$$

Ejemplo de la distancia

Consideramos $\sigma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ y $u : \mu \mapsto d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. Entonces

$$|u(\nu) - u(\mu)| = |d_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) - d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)| \leq d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu).$$

Tomando $\eta \in \Gamma_o(\mu, \sigma)$ y la curva $\nu_t := ((1-t)\pi_x + t\pi_y) \# \eta$,

$$u(\mu) - u(\nu_t) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) - (1-t)d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = td_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t).$$

Entonces $|Du(\mu)| \equiv 1$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, tenemos

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \mu} \frac{|\varphi(u(\nu)) - \varphi(u(\mu))|}{d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)} = |\varphi'(u(\mu))| |Du(\mu)| + 0 = |\varphi'(u(\mu))|.$$

Remark Las funciones radiales son *sencillas* para la pendiente métrica, al contrario de la L-diferenciabilidad o el gradiente de Wasserstein.

Table of Contents

Definiciones

Compatibilidad de la definición métrica con las previas

Conclusión

Previamente

- La diferenciabilidad en el sentido de distribuciones usa variaciones al lado de soluciones $(\mu_s^{\mu^0, p})_{s \in [0, t]}$ de

$$\partial_s \mu_s + \operatorname{div} (\mu_s \nabla p) = 0, \quad \mu_0 = \mu^0, \quad p \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

Previamente

- La diferenciabilidad en el sentido de distribuciones usa variaciones al lado de soluciones $(\mu_s^{\mu^0, p})_{s \in [0, t]}$ de

$$\partial_s \mu_s + \operatorname{div} (\mu_s \nabla p) = 0, \quad \mu_0 = \mu^0, \quad p \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

- La L-diferenciabilidad es equivalente a la Wasserstein-diferenciabilidad.

Previamente

- La diferenciabilidad en el sentido de distribuciones usa variaciones al lado de soluciones $(\mu_s^{\mu^0, p})_{s \in [0, t]}$ de

$$\partial_s \mu_s + \operatorname{div} (\mu_s \nabla p) = 0, \quad \mu_0 = \mu^0, \quad p \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

- La L-diferenciabilidad es equivalente a la Wasserstein-diferenciabilidad.
- El gradiente de Wasserstein pertenece a $\operatorname{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega) \subset L_\mu^2(\Omega; T\Omega)$, y representa localmente las variaciones de una función $u : \mathcal{P}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente linealización, donde $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$:

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{x \in \Omega} \langle \nabla_W u(x), y - x \rangle d\eta(x, y) + o(d_W(\mu, \nu)).$$

Previamente

- La diferenciabilidad en el sentido de distribuciones usa variaciones al lado de soluciones $(\mu_s^{\mu^0, p})_{s \in [0, t]}$ de

$$\partial_s \mu_s + \operatorname{div}(\mu_s \nabla p) = 0, \quad \mu_0 = \mu^0, \quad p \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

- La L-diferenciabilidad es equivalente a la Wasserstein-diferenciabilidad.
- El gradiente de Wasserstein pertenece a $\operatorname{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega) \subset L_\mu^2(\Omega; T\Omega)$, y representa localmente las variaciones de una función $u : \mathcal{P}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente linealización, donde $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$:

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{x \in \Omega} \langle \nabla_W u(x), y - x \rangle d\eta(x, y) + o(d_W(\mu, \nu)).$$

¿Existe una generalización de (1) con estas definiciones?

Dos primeros casos

Por el gradiente de Wasserstein, el mismo cálculo que en el caso Euclidiano implica

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \mu} \frac{|u(\nu) - u(\mu)|}{d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)} = |\nabla_W u(\mu)|_{L^2_\mu}.$$

Dos primeros casos

Por el gradiente de Wasserstein, el mismo cálculo que en el caso Euclidiano implica

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \mu} \frac{|u(\nu) - u(\mu)|}{d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)} = |\nabla_W u(\mu)|_{L^2_\mu}.$$

Notamos que cada curva $(\mu_s^{\mu_0, p})_{s \in [0, t]}$ solución de una ecuación de continuidad con $p \in \mathcal{C}_c^\infty$ se aproxima al orden 1 por la curva

$$\hat{\mu}_s := (id + s \nabla p) \# \mu_0 = \exp_{\mu_0} (s \cdot \nabla p \# \mu_0).$$

Dos primeros casos

Por el gradiente de Wasserstein, el mismo cálculo que en el caso Euclidiano implica

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \mu} \frac{|u(\nu) - u(\mu)|}{d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)} = |\nabla_W u(\mu)|_{L^2_{\mu}}.$$

Notamos que cada curva $(\mu_s^{\mu_0, p})_{s \in [0, t]}$ solución de una ecuación de continuidad con $p \in \mathcal{C}_c^{\infty}$ se aproxima al orden 1 por la curva

$$\hat{\mu}_s := (id + s \nabla p) \# \mu_0 = \exp_{\mu_0}(s \cdot \nabla p \# \mu_0).$$

Además, sabemos que $\nabla p \# \mu_0 \in \text{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)$.

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Sea $s \mapsto \mu_s := \exp_{\mu}(s \cdot \xi) = \delta_{s\xi(0)}$ para $\xi \in \text{Tan}_{\mu}$.

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Sea $s \mapsto \mu_s := \exp_{\mu}(s \cdot \xi) = \delta_{s\xi(0)}$ para $\xi \in \text{Tan}_{\mu}$. Para s pequeño,

$$d_{\mathcal{W}}^2(\exp_{\mu}(s \cdot \xi), \sigma) = \frac{|s\xi(0) - 1|^2 + |s\xi(0) + 1|^2}{2}$$

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Sea $s \mapsto \mu_s := \exp_{\mu}(s \cdot \xi) = \delta_{s\xi(0)}$ para $\xi \in \text{Tan}_{\mu}$. Para s pequeño,

$$d_{\mathcal{W}}^2(\exp_{\mu}(s \cdot \xi), \sigma) = \frac{|s\xi(0) - 1|^2 + |s\xi(0) + 1|^2}{2} = |s\xi(0)|^2 + 1$$

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Sea $s \mapsto \mu_s := \exp_{\mu}(s \cdot \xi) = \delta_{s\xi(0)}$ para $\xi \in \text{Tan}_{\mu}$. Para s pequeño,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}}^2(\exp_{\mu}(s \cdot \xi), \sigma) &= \frac{|s\xi(0) - 1|^2 + |s\xi(0) + 1|^2}{2} = |s\xi(0)|^2 + 1 \\ \implies d_{\mathcal{W}}^2(\mu_s, \sigma) &= d_{\mathcal{W}}^2(\mu_s, \mu_0) + d_{\mathcal{W}}^2(\mu_0, \sigma). \end{aligned}$$

Con el cono tangente regular

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ con

$$\mu^0 = \delta_0, \quad \sigma = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \quad u = d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma).$$

Vimos con las reglas de cálculo que $|Du(\mu)| = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Sea $s \mapsto \mu_s := \exp_{\mu}(s \cdot \xi) = \delta_{s\xi(0)}$ para $\xi \in \text{Tan}_{\mu}$. Para s pequeño,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}}^2(\exp_{\mu}(s \cdot \xi), \sigma) &= \frac{|s\xi(0) - 1|^2 + |s\xi(0) + 1|^2}{2} = |s\xi(0)|^2 + 1 \\ \implies d_{\mathcal{W}}^2(\mu_s, \sigma) &= d_{\mathcal{W}}^2(\mu_s, \mu_0) + d_{\mathcal{W}}^2(\mu_0, \sigma). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sup_{\xi \in \text{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)} \overline{\lim}_{s \searrow 0} \frac{|d_{\mathcal{W}}^2(\mu_s, \sigma) - d_{\mathcal{W}}^2(\mu_0, \sigma)|}{d_{\mathcal{W}}(\mu_s, \mu_0)} = 0.$$

Con el cono tangente generalizado

Recordemos de la última vez que

$$\xi := \frac{\delta_{1-0} + \delta_{(-1)-0}}{2} = \exp_{\mu}^{-1}(\sigma) \subset \partial u(\mu).$$

Con el cono tangente generalizado

Recordemos de la última vez que

$$\xi := \frac{\delta_{1-0} + \delta_{(-1)-0}}{2} = \exp_{\mu}^{-1}(\sigma) \in \partial u(\mu).$$

Usando [Gig08, Prop 4.10], para cualquier $\zeta \in \mathbf{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)$ tenemos

$$u(\exp_{\mu}(s \cdot \zeta)) - u(\mu) = -2s \sup_{\eta \in \Gamma_{\mu}(\xi, \zeta)} \int_{(x, v, w)} \langle v, w \rangle d\eta + o(s)$$

Con el cono tangente generalizado

Recordemos de la última vez que

$$\xi := \frac{\delta_{1-0} + \delta_{(-1)-0}}{2} = \exp_{\mu}^{-1}(\sigma) \in \partial u(\mu).$$

Usando [Gig08, Prop 4.10], para cualquier $\zeta \in \mathbf{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(\exp_{\mu}(s \cdot \zeta)) - u(\mu) &= -2s \sup_{\eta \in \Gamma_{\mu}(\xi, \zeta)} \int_{(x, v, w)} \langle v, w \rangle d\eta + o(s) \\ &\geq -2s \|\xi\|_{\mu} \|\zeta\|_{\mu} + o(s), \quad \text{con ig. si } \zeta = \xi. \end{aligned}$$

Con el cono tangente generalizado

Recordemos de la última vez que

$$\xi := \frac{\delta_{1-0} + \delta_{(-1)-0}}{2} = \exp_{\mu}^{-1}(\sigma) \in \partial u(\mu).$$

Usando [Gig08, Prop 4.10], para cualquier $\zeta \in \mathbf{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(\exp_{\mu}(s \cdot \zeta)) - u(\mu) &= -2s \sup_{\eta \in \Gamma_{\mu}(\xi, \zeta)} \int_{(x, v, w)} \langle v, w \rangle d\eta + o(s) \\ &\geq -2s \|\xi\|_{\mu} \|\zeta\|_{\mu} + o(s), \quad \text{con ig. si } \zeta = \xi. \end{aligned}$$

Notamos que $\|\xi\|_{\mu} = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$.

Con el cono tangente generalizado

Recordemos de la última vez que

$$\xi := \frac{\delta_{1-0} + \delta_{(-1)-0}}{2} = \exp_{\mu}^{-1}(\sigma) \in \partial u(\mu).$$

Usando [Gig08, Prop 4.10], para cualquier $\zeta \in \mathbf{Tan}_{\mu} \mathcal{P}_2(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(\exp_{\mu}(s \cdot \zeta)) - u(\mu) &= -2s \sup_{\eta \in \Gamma_{\mu}(\xi, \zeta)} \int_{(x, v, w)} \langle v, w \rangle d\eta + o(s) \\ &\geq -2s \|\xi\|_{\mu} \|\zeta\|_{\mu} + o(s), \quad \text{con ig. si } \zeta = \xi. \end{aligned}$$

Notamos que $\|\xi\|_{\mu} = d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$. A lo largo de $s \mapsto \exp_{\mu}(s \cdot \xi)$,

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{|u(\exp_{\mu}(s \cdot \xi)) - u(\mu)|}{d_{\mathcal{W}}(\mu, \exp_{\mu}(s \cdot \xi))} = 2\|\xi\|_{\mu} = 2d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma).$$

Table of Contents

Definiciones

Compatibilidad de la definición métrica con las previas

Conclusión

De la comparación anterior, podemos inferir que $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$ tiene más sentido geométrico que las otras definiciones.

De la comparación anterior, podemos inferir que $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$ tiene más sentido geométrico que las otras definiciones.

Esta línea de argumentación viene de [AF14], donde se estudia sistemas de Euler compresible.



De la comparación anterior, podemos inferir que $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$ tiene más sentido geométrico que las otras definiciones.



Esta línea de argumentación viene de [AF14], donde se estudia sistemas de Euler compresible. La falta de exactitud de la representación impide la transposición de la prueba de unicidad de la solución del caso métrico a la teoría del gradiente de Wasserstein, o la "teoría de Riemann" tomando de F. Otto.

De la comparación anterior, podemos inferir que $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$ tiene más sentido geométrico que las otras definiciones.



Esta línea de argumentación viene de [AF14], donde se estudia sistemas de Euler compresible. La falta de exactitud de la representación impide la transposición de la prueba de unicidad de la solución del caso métrico a la teoría del gradiente de Wasserstein, o la "teoría de Riemann" tomando de F. Otto.

Sin embargo, el teorema de Brenier asegura que ese tipo de problema no ocurre con medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. Así, por ejemplo en [FN12], la táctica es de quedarse sobre este conjunto.

El ejemplo lineal

Consideramos $u : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $u(\mu) = \langle \ell, \mu \rangle$.

Distrib.	L-derivada	Derivada lineal	Derivada natural	Subdif. regular	Subdif. general
$\text{grad}_\mu u(\mu)$	$\partial_\mu u(\mu)$	$\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot)$	$D_\mu u(\mu, \cdot)$	$\partial \cdot u(\mu),$ $\nabla_w u$	$\partial \cdot u(\mu)$
$-\text{div}(\mu \nabla \ell)$	$\nabla \ell$	ℓ	$\nabla \ell$	$\nabla \ell,$ sel° de $\partial \ell$	$\nabla \ell \# \mu,$ $\mathcal{P}(\text{Gr}(\partial \ell))$
distrib°, dualidad con $\mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R})$	pertenece a $L_\mu^2(\Omega; T\Omega)$	pertenece a $L_\mu^2(\Omega; \mathbb{R})$	pertenece a $L_\mu^2(\Omega; T\Omega)$	pertenece a $T_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$	pertenece a $T_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$

No continuará

Esta parte

- apertura sobre la teoría en espacios metricos

No continuará

Esta parte

- apertura sobre la teoría en espacios metricos
- Diferencia entre \mathbf{Tan}_μ y \mathbf{Tan}_μ .

No continuará

Esta parte

- apertura sobre la teoría en espacios metricos
- Diferencia entre \mathbf{Tan}_μ y \mathbf{Tan}_μ .

La elección de la definición toma en consideración la facilidad de manipulación de la representación asociada.

No continuará

Esta parte

- apertura sobre la teoría en espacios metricos
- Diferencia entre \mathbf{Tan}_μ y \mathbf{Tan}_μ .

La elección de la definición toma en consideración la facilidad de manipulación de la representación asociada.

Preguntas abiertas

- ¿Comportamiento de los sub/supdiferenciales usando $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$?

No continuará

Esta parte

- apertura sobre la teoría en espacios metricos
- Diferencia entre \mathbf{Tan}_μ y \mathbf{Tan}_μ .

La elección de la definición toma en consideración la facilidad de manipulación de la representación asociada.

Preguntas abiertas

- ¿Comportamiento de los sub/supdiferenciales usando $\mathbf{Tan}_\mu \mathcal{P}_2(\Omega)$?
- El estudio de ecuaciones de continuidad impulsadas por campos de medidas recién empezó ([PR13, Pic19]).

¡Gracias!

- [AF14] Luigi Ambrosio and Jin Feng.
On a class of first order Hamilton–Jacobi equations in metric spaces.
Journal of Differential Equations, 256(7):2194–2245, April 2014.
- [FN12] Jin Feng and Truyen Nguyen.
Hamilton–Jacobi equations in space of measures associated with a system of conservation laws.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 97(4):318–390, April 2012.
- [GHN15] Yoshikazu Giga, Nao Hamamuki, and Atsushi Nakayasu.
Eikonal equations in metric spaces.
Transactions of the American Mathematical Society, 367(1):49–66, January 2015.
- [Gig08] Nicola Gigli.
On the Geometry of the Space of Probability Measures Endowed with the Quadratic Optimal Transport Distance.
PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2008.
- [GNT08] Wilfrid Gangbo, Truyen Nguyen, and Adrian Tudorascu.
Hamilton–Jacobi Equations in the Wasserstein Space.
Methods and Applications of Analysis, 15(2):155–184, 2008.

- [GS15a] Wilfrid Gangbo and Andrzej Święch.
Existence of a solution to an equation arising from the theory of Mean Field Games.
Journal of Differential Equations, 259(11):6573–6643, December 2015.
- [GS15b] Wilfrid Gangbo and Andrzej Święch.
Metric viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations depending on local slopes.
Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 54(1):1183–1218, September 2015.
- [HK15] Ryan Hynd and Hwa Kil Kim.
Value functions in the Wasserstein spaces: Finite time horizons.
Journal of Functional Analysis, 269(4):968–997, August 2015.
- [Pic19] Benedetto Piccoli.
Measure Differential Equations.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 233(3):1289–1317, September 2019.
- [PR13] Benedetto Piccoli and Francesco Rossi.
Transport Equation with Nonlocal Velocity in Wasserstein Spaces: Convergence of Numerical Schemes.
Acta Applicandae Mathematicae, 124(1):73–105, April 2013.