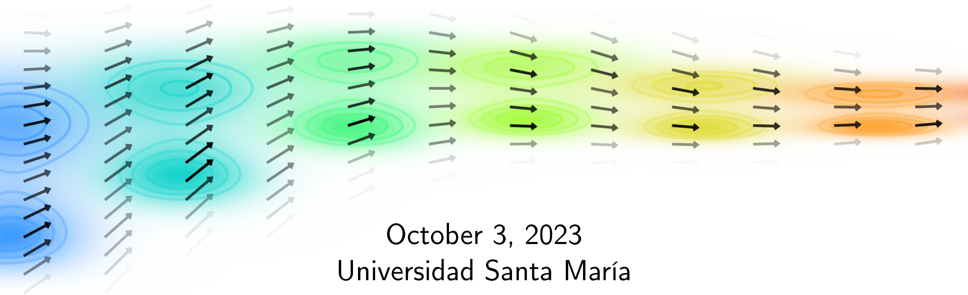
El D en EDP

Estrategías para derivación en espacios de medidas - Capítulo 3, Parte 1

Averil Prost (LMI INSA Rouen)



October 3, 2023

Universidad Santa María

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot,\cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos una segunda manera de introducir la L-diferenciabilidad.

- El gradiente $\partial_\mu u$ se define como $\nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}$.
- Definición adaptadas a los casos suaves, como juegos de campo medio.
- Podríamos esperar una definición de sub/supdiferencial.

En esta primera parte, vamos a adoptar un punto de visto más geométrico.

Table of Contents

El espacio tangente (regular)

Def 1 Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Notamos el **espacio tangente** (regular)

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) := \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\}}^{L^2_\mu}.$$

El espacio tangente (regular)

Def 1 Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Notamos el **espacio tangente** (regular)

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) := \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\}}^{L^2_\mu}.$$

Def 1 tiene sentido con respecto al teorema de Benamou-Brenier. Una curva absolutamente continua tiene velocidad en Tan_{μ_t} casi para todo t. Esta definicion aparece en [AGS05, Definition 8.4.1].

El espacio tangente (regular)

Def 1 Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Notamos el **espacio tangente** (regular)

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) := \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\}}^{L^2_\mu}.$$

Def 1 tiene sentido con respecto al teorema de Benamou-Brenier. Una curva absolutamente continua tiene velocidad en Tan_{μ_t} casi para todo t. Esta definicion aparece en [AGS05, Definition 8.4.1].

Los elementos de $\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pueden cambiar radicalmente con μ. Si $\mu = \delta_0$, entonces

$$\mathsf{Tan}_{\delta_0} \mathscr{P}_2(\Omega) \simeq T_0\Omega \simeq \mathbb{R}^d.$$

Los subdiferenciales

Def 2 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Los subdiferenciales

Def 2 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Un $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pertenece al **subdiferencial débil** de u en μ, denotado $\partial^d_{\bullet} u(\mu)$, si para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, existe $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$ satisfaciendo

$$u(\nu) - u(\mu) \geqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x), y - x \rangle \, d\eta(x, y) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)\right). \quad (1)$$

Los subdiferenciales

Def 2 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Un $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pertenece al **subdiferencial débil** de u en μ, denotado $\partial^d_{\cdot} u(\mu)$, si para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, existe $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$ satisfaciendo

$$u(\nu) - u(\mu) \geqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x), y - x \rangle \, d\eta(x,y) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)\right). \quad (1)$$

Def 3 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Un $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pertenece al **subdiferencial fuerte** de u en μ, denotado $\partial^f_{\cdot} u(\mu)$, si para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y todo $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$,

$$u(\nu) - u(\mu) \geqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x), y - x \rangle \, d\eta(x,y) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)\right). \quad (2)$$

Ejemplo lineal

Consideramos $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$ por $\ell \in \mathcal{C}^1$ subcuadrático y $\lambda-$semiconvexo, i.e.

$$\ell(y) - \ell(x) \geqslant \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle + \frac{\lambda}{2} |y - x|^2 .$$

Ejemplo lineal

Consideramos $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$ por $\ell \in \mathcal{C}^1$ subcuadrático y $\lambda-$semiconvexo, i.e.

$$\ell(y) - \ell(x) \geqslant \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle + \frac{\lambda}{2} |y - x|^2 .$$

Luego, para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$,

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{(x,y)\in\Omega^2} (\ell(y) - \ell(x))\, d\eta(x, y)$$

Ejemplo lineal

Consideramos $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} \ell(x)d\mu(x)$ por $\ell \in \mathcal{C}^1$ subcuadrático y $\lambda-$semiconvexo, i.e.

$$\ell(y) - \ell(x) \geqslant \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle + \frac{\lambda}{2} \left| y - x \right|^2 .$$

Luego, para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$,

$$\begin{aligned} u(\nu) - u(\mu) &= \int_{(x,y)\in\Omega^2} \left(\ell(y) - \ell(x)\right) d\eta(x,y) \\ &\geqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle \, d\eta(x,y) + \frac{\lambda}{2} d^2_{\mathcal{W}}(\mu,\nu). \end{aligned}$$

Ejemplo lineal

Consideramos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x)d\mu(x)$ por $\ell \in \mathcal{C}^1$ subcuadrático y $\lambda-$semiconvexo, i.e.

$$\ell(y) - \ell(x) \geqslant \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle + \frac{\lambda}{2} |y - x|^2 .$$

Luego, para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$,

$$\begin{aligned} u(\nu) - u(\mu) &= \int_{(x,y)\in\Omega^2} (\ell(y) - \ell(x))\, d\eta(x, y) \\ &\geqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \nabla \ell(x), y - x \rangle\, d\eta(x, y) + \frac{\lambda}{2} d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

En el otro lado, gracias a la $\lambda-$semiconvexidad, $\nabla \ell \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ para cada μ. Entonces $\nabla \ell \in \partial^f_{\cdot} u(\mu)$.

Vínculo (1/3)

[GT19, Teorema 3.6] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\partial^d_\cdot u(\mu) = \partial^f_\cdot u(\mu) \qquad =: \partial_\cdot u(\mu).$$

Vínculo (1/3)

[GT19, Teorema 3.6] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\partial^d_\cdot u(\mu) = \partial^f_\cdot u(\mu) \quad =: \partial_\cdot u(\mu).$$

En primer lugar, tenemos $\partial^f_\cdot u(\mu) \subset \partial^d_\cdot u(\mu)$.

Vínculo (1/3)

[GT19, Teorema 3.6] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\partial^d_\cdot u(\mu) = \partial^f_\cdot u(\mu) \quad =: \partial_\cdot u(\mu).$$

En primer lugar, tenemos $\partial^f_\cdot u(\mu) \subset \partial^d_\cdot u(\mu)$. Para probar la otra inclusión, vamos a mostrar que para toda μ fija y $\xi \in \partial^d_\cdot u(\mu)$,

$$e(\mu,\nu) := \inf_{\eta \in \Gamma_o(\mu,\nu)} \sup_{\overline{\eta} \in \Gamma_o(\mu,\nu)} \left| \int_{(x,y)} \langle \xi(x), y - x \rangle \, d[\eta - \overline{\eta}] \right|$$

es un $o(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu))$.

Vínculo (1/3)

[GT19, Teorema 3.6] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\partial_\cdot^d u(\mu) = \partial_\cdot^f u(\mu) \quad =: \partial_\cdot u(\mu).$$

En primer lugar, tenemos $\partial_\cdot^f u(\mu) \subset \partial_\cdot^d u(\mu)$. Para probar la otra inclusión, vamos a mostrar que para toda μ fija y $\xi \in \partial_\cdot^d u(\mu)$,

$$e(\mu,\nu) := \inf_{\eta \in \Gamma_o(\mu,\nu)} \sup_{\overline{\eta} \in \Gamma_o(\mu,\nu)} \left| \int_{(x,y)} \langle \xi(x), y-x \rangle \, d[\eta - \overline{\eta}] \right|$$

es un $o(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu))$. Notamos que $\forall\, \eta \in \Gamma_o(\mu,\nu)$, usando Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x) - \nabla\varphi(x), y-x \rangle \, d\eta(x,y) \right| \leqslant \|\xi - \nabla\varphi\|_{L^2_\mu} d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu).$$

Vínculo (2/3)

Además, para $(\eta, \overline{\eta}) \in \Gamma_o(\mu, \nu)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, d[\eta - \overline{\eta}](x, y) = 0.$$

Vínculo (2/3)

Además, para $(\eta, \overline{\eta}) \in \Gamma_o(\mu, \nu)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} [\varphi(y) - \varphi(x)] \, d[\eta - \overline{\eta}](x, y) = 0.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, para cada $(x, y) \in \Omega^2$,

$$-\frac{\|\nabla^2\varphi\|_\infty}{2} |x-y|^2 \leqslant \varphi(y) - \varphi(x) - \langle \nabla\varphi(x), y - x \rangle \leqslant \frac{\|\nabla^2\varphi\|_\infty}{2} |x-y|^2 .$$

Vínculo (2/3)

Además, para $(\eta, \overline{\eta}) \in \Gamma_o(\mu, \nu)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, d[\eta - \overline{\eta}](x, y) = 0.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, para cada $(x, y) \in \Omega^2$,

$$-\frac{\|\nabla^2\varphi\|_\infty}{2} |x - y|^2 \leqslant \varphi(y) - \varphi(x) - \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle \leqslant \frac{\|\nabla^2\varphi\|_\infty}{2} |x - y|^2 .$$

Entonces, por integración,

$$\left| \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle\, d[\eta - \overline{\eta}](x, y) \right| \leqslant \|\nabla^2\varphi\|_\infty d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Vínculo (3/3)

Sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{C}_c^\infty$ tal que $\nabla\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2_\mu} \xi$. Luego $e(\mu,\nu)$ satisface

$$e(\mu,\nu) \leqslant \inf_{\eta} \sup_{\overline{\eta}} \left| \int \langle \nabla\varphi_n, y-x \rangle \, d[\eta - \overline{\eta}] \right| + \left| \int \langle \xi - \nabla\varphi_n, y-x \rangle \, d[\eta - \overline{\eta}] \right|$$
$$\leqslant \|\nabla^2\varphi_n\|_\infty d^2_{\mathcal{W}}(\mu,\nu) + 2\|\xi - \nabla\varphi_n\|_{L^2_\mu} d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu).$$

Dividiendo por $d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)$ y tomando el límite superior en $d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu) \to 0$,

$$\varlimsup_{d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)\to 0} \frac{e(\mu,\nu)}{d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)} \leqslant 2\|\xi - \nabla\varphi_n\|_{L^2_\mu}.$$

Dejando $n \to \infty$, obtenemos que $e(\mu,\nu) = o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)\right)$. $\square$

El supdiferencial

Def 4 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Notamos $\partial^{\cdot} u(\mu)$ el conjunto de $\xi \in \mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ satisfaciendo

$$u(\nu) - u(\mu) \leqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x), y - x \rangle \, d\eta(x,y) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)\right)$$

para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu,\nu)$.

El supdiferencial

Def 4 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Notamos $\partial^{\cdot} u(\mu)$ el conjunto de $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ satisfaciendo

$$u(\nu) - u(\mu) \leqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x), y - x\rangle \, d\eta(x,y) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)\right)$$

para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu,\nu)$.

Notamos que si $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, existe $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{C}_c^1$ tal que

$$\nabla\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2_\mu} \xi \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\nabla\varphi_n = \nabla\left(\alpha\varphi_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2_\mu} \alpha\,\xi \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Entonces $\xi \in \partial^{\cdot} u(\mu)$ es equivalente a $-\xi \in \partial_{\cdot}(-u)(\mu)$.

Ejemplo cuádratico

Sean $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $\xi \in \mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\sigma := (id + \xi)\#\mu$ tales que

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = \int_{x \in \Omega} |\xi(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Ejemplo cuádratico

Sean $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\sigma := (id + \xi)\#\mu$ tales que

$$d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma) = \int_{x \in \Omega} |\xi(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Sean $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$. Como $(\pi_x + \xi, \pi_y)\#\eta \in \Gamma(\sigma, \nu)$,

$$d_{\mathcal{W}}^2(\nu, \sigma) \leqslant \int_{(x,y) \in \Omega^2} |x + \xi(x) - y|^2 \, d\eta(x, y)$$

Ejemplo cuádratico

Sean $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\sigma := (id + \xi)\#\mu$ tales que

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = \int_{x \in \Omega} |\xi(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Sean $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$. Como $(\pi_x + \xi, \pi_y)\#\eta \in \Gamma(\sigma, \nu)$,

$$\begin{aligned} d^2_{\mathcal{W}}(\nu, \sigma) &\leqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} |x + \xi(x) - y|^2 \, d\eta(x, y) \\ &= \int_{(x,y)\in\Omega^2} \left[|x - y|^2 + 2 \langle x - y, \xi(x) \rangle + |\xi(x)|^2 \right] d\eta(x, y) \end{aligned}$$

Ejemplo cuádratico

Sean $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\sigma := (id + \xi)\#\mu$ tales que

$$d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma) = \int_{x \in \Omega} |\xi(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Sean $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$. Como $(\pi_x + \xi, \pi_y)\#\eta \in \Gamma(\sigma, \nu)$,

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{W}}^2(\nu, \sigma) &\leqslant \int_{(x,y)\in\Omega^2} |x + \xi(x) - y|^2 \, d\eta(x, y) \\
&= \int_{(x,y)\in\Omega^2} \left[|x - y|^2 + 2 \langle x - y, \xi(x) \rangle + |\xi(x)|^2 \right] d\eta(x, y) \\
&= d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu) + \int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle y - x, -2\xi(x) \rangle \, d\eta(x, y) + d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma).
\end{aligned}$$

Ejemplo cuádratico

Sean $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\sigma := (id + \xi)\#\mu$ tales que

$$d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma) = \int_{x \in \Omega} |\xi(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Sean $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu)$. Como $(\pi_x + \xi, \pi_y)\#\eta \in \Gamma(\sigma, \nu)$,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}}^2(\nu, \sigma) &\leqslant \int_{(x,y) \in \Omega^2} |x + \xi(x) - y|^2 \, d\eta(x,y) \\ &= \int_{(x,y) \in \Omega^2} \left[|x - y|^2 + 2 \langle x - y, \xi(x) \rangle + |\xi(x)|^2 \right] d\eta(x,y) \\ &= d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu) + \int_{(x,y) \in \Omega^2} \langle y - x, -2\xi(x) \rangle \, d\eta(x,y) + d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma). \end{aligned}$$

Entonces tenemos $-2\xi \in \partial^\cdot d_{\mathcal{W}}^2(\cdot, \sigma)(\mu)$.

Table of Contents

El gradiente de Wasserstein

[GT19, Teorema 3.10] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

El gradiente de Wasserstein

[GT19, Teorema 3.10] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Si $\partial_{.} u(\mu) \cap \partial^{.} u(\mu) \neq \emptyset$, existe un único $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ tal que

$$\partial_{.} u(\mu) \cap \partial^{.} u(\mu) =: \{\xi\}\,.$$

El gradiente de Wasserstein

[GT19, Teorema 3.10] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Si $\partial_{\cdot} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu) \neq \emptyset$, existe un único $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ tal que

$$\partial_{\cdot} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu) =: \{\xi\}\,.$$

Llamamos $\nabla_W u(\mu) := \xi$ el **gradiente de Wasserstein**, y decimos que u es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\nabla_W u(\mu)$ existe en cada $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

El gradiente de Wasserstein

[GT19, Teorema 3.10] Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Si $\partial_. u(\mu) \cap \partial^. u(\mu) \neq \emptyset$, existe un único $\xi \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ tal que

$$\partial_. u(\mu) \cap \partial^. u(\mu) =: \{\xi\} .$$

Llamamos $\nabla_W u(\mu) := \xi$ el **gradiente de Wasserstein**, y decimos que u es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\nabla_W u(\mu)$ existe en cada $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Para mostrar eso, recordemos que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $id + \frac{1}{n}\nabla\varphi$ es el gradiente de un potencial convexo. Luego

$$\Gamma_o\left(\mu, \left(id + \frac{1}{n}\nabla\varphi\right)\#\mu\right) = \left\{\left(id, id + \frac{1}{n}\nabla\varphi\right)\#\mu\right\}. \tag{3}$$

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_{.} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu)$.

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_{\cdot} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, sea n suficiamente larga tal que (3).

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_\cdot u(\mu) \cap \partial^\cdot u(\mu)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, sea n suficiamente larga tal que (3). Tomando $\nu := (id + \nabla\varphi/n)\#\mu$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x) - \zeta(x), y - x \rangle \, d[(id, id + \nabla\varphi/n)]\#\mu = o(d_{\mathcal{W}}(\mu,\nu)),$$

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_. u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, sea n suficiamente larga tal que (3). Tomando $\nu := (id + \nabla\varphi/n)\#\mu$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x) - \zeta(x), y - x \rangle \, d[(id, id + \nabla\varphi/n)]\#\mu = o(d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)),$$

i.e.

$$\frac{1}{n} \int_{x\in\Omega} \langle \xi(x) - \zeta(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, d\mu(x) = o\left(\frac{1}{n} \|\nabla\varphi\|_\mu\right).$$

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_{.} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, sea n suficiamente larga tal que (3). Tomando $\nu := (id + \nabla\varphi/n)\#\mu$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x) - \zeta(x), y - x \rangle \, d[(id, id + \nabla\varphi/n)]\#\mu = o(d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)),$$

i.e.

$$\frac{1}{n} \int_{x\in\Omega} \langle \xi(x) - \zeta(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, d\mu(x) = o\left(\frac{1}{n} \|\nabla\varphi\|_\mu \right).$$

Multiplicando por n y tomando el límite en $n \to \infty$, obtenemos

$$\int_{x\in\Omega} \langle \xi(x) - \zeta(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, d\mu(x) = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty,$$

Idea de la demostración

Sea $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi, \zeta \in \partial_{\cdot} u(\mu) \cap \partial^{\cdot} u(\mu)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, sea n suficiamente larga tal que (3). Tomando $\nu := (id + \nabla\varphi/n)\#\mu$, tenemos

$$\int_{(x,y)\in\Omega^2} \langle \xi(x) - \zeta(x), y - x \rangle \, d[(id, id + \nabla\varphi/n)]\#\mu = o(d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)),$$

i.e.

$$\frac{1}{n} \int_{x\in\Omega} \langle \xi(x) - \zeta(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, d\mu(x) = o\left(\frac{1}{n} \|\nabla\varphi\|_\mu \right).$$

Multiplicando por n y tomando el límite en $n \to \infty$, obtenemos

$$\int_{x\in\Omega} \langle \xi(x) - \zeta(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, d\mu(x) = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty,$$

entonces $\xi = \zeta$ en $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Ejemplos

La función $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\ell \in \mathcal{C}^1$ es semiconvexo y semiconcavo, luego $\mathcal{C}^2$ con $\nabla^2 \ell$ acotado.

Ejemplos

La función $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\ell \in \mathcal{C}^1$ es semiconvexo y semiconcavo, luego $\mathcal{C}^2$ con $\nabla^2 \ell$ acotado.

Sin embargo, la función $u : \mu \mapsto d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ puede *no ser* $\mathcal{W}-$diferenciable.

Ejemplos

La función $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\ell \in \mathcal{C}^1$ es semiconvexo y semiconcavo, luego $\mathcal{C}^2$ con $\nabla^2 \ell$ acotado.

Sin embargo, la función $u : \mu \mapsto d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ puede *no ser* $\mathcal{W}-$diferenciable.

> Sean $A = (1,0)$, $B = (0,-1)$, $C = (-1,0)$ y $D = (0,1)$. Notamos $\mu = \frac{\delta_A + \delta_C}{2}$ y $\sigma = \frac{\delta_B + \delta_D}{2}$.
>
> $\square$

Ejemplos

La función $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\ell \in \mathcal{C}^1$ es semiconvexo y semiconcavo, luego $\mathcal{C}^2$ con $\nabla^2 \ell$ acotado.

Sin embargo, la función $u : \mu \mapsto d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ puede *no ser* $\mathcal{W}-$diferenciable.

Sean $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$, $C = (-1, 0)$ y $D = (0, 1)$. Notamos $\mu = \frac{\delta_A + \delta_C}{2}$ y $\sigma = \frac{\delta_B + \delta_D}{2}$. Consideramos $\nu_t = (\pi_x, \pi_y + t\pi_x)\#\mu$, $t \in [-1, 1]$. Si u fuera diferenciable, notando $\xi = \nabla_W u(\mu)$, y $\Gamma_o(\mu, \nu_t) = \{\eta_t\}$, tendríamos

$$u(\nu_t) - u(\mu) = \int \langle \xi, y - x \rangle \, d\eta_t + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t)\right) = \frac{t\left(\xi_2(A) - \xi_2(C)\right)}{2} + o\left(t\right)$$

una aplicación diferenciable en $t = 0$.

$\square$

Ejemplos

La función $u : \mu \mapsto \langle \ell, \mu \rangle$ es $\mathcal{W}-$diferenciable si $\ell \in \mathcal{C}^1$ es semiconvexo y semiconcavo, luego $\mathcal{C}^2$ con $\nabla^2 \ell$ acotado.

Sin embargo, la función $u : \mu \mapsto d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ puede *no ser* $\mathcal{W}-$diferenciable.

Sean $A = (1,0)$, $B = (0,-1)$, $C = (-1,0)$ y $D = (0,1)$. Notamos $\mu = \frac{\delta_A + \delta_C}{2}$ y $\sigma = \frac{\delta_B + \delta_D}{2}$. Consideramos $\nu_t = (\pi_x, \pi_y + t\pi_x)\#\mu$, $t \in [-1,1]$. Si u fuera diferenciable, notando $\xi = \nabla_W u(\mu)$, y $\Gamma_o(\mu, \nu_t) = \{\eta_t\}$, tendríamos

$$u(\nu_t) - u(\mu) = \int \langle \xi, y - x \rangle \, d\eta_t + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu_t)\right) = \frac{t\left(\xi_2(A) - \xi_2(C)\right)}{2} + o\left(t\right)$$

una aplicación diferenciable en $t = 0$. Pero

$$u(\nu_t) - u(\mu) = d^2_{\mathcal{W}}(\nu_t, \sigma) - d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma) = \sqrt{1 + (1 - |t|)^2} - \sqrt{2},$$

que no es diferenciable. $\square$

Table of Contents

Vínculo con la L-diferenciabilidad

[GT19, Corolario 3.22] Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{W}-$diferenciable en $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si u es L-diferenciable en μ, y en ese caso,

$$\partial_\mu u = \nabla_W u(\mu).$$

Vínculo con la L-diferenciabilidad

[GT19, Corolario 3.22] Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{W}-$diferenciable en $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si u es L-diferenciable en μ, y en ese caso,

$$\partial_\mu u = \nabla_W u(\mu).$$

- Punto de visto más geometrico.

Vínculo con la L-diferenciabilidad

[GT19, Corolario 3.22] Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{W}-$diferenciable en $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si u es L-diferenciable en μ, y en ese caso,

$$\partial_\mu u = \nabla_W u(\mu).$$

- Punto de visto más geometrico.
- El hecho $\partial_\mu u = \nabla \frac{\delta u}{\delta \mu}$ es coherente con $\partial_\mu u \in \text{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Vínculo con la L-diferenciabilidad

[GT19, Corolario 3.22] Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{W}-$diferenciable en $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si u es L-diferenciable en μ, y en ese caso,

$$\partial_\mu u = \nabla_W u(\mu).$$

- Punto de visto más geometrico.
- El hecho $\partial_\mu u = \nabla \frac{\delta u}{\delta \mu}$ es coherente con $\partial_\mu u \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.
- La distancia al cuádrado no es siempre diferenciable.

Vínculo con la L-diferenciabilidad

[GT19, Corolario 3.22] Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{W}-$diferenciable en $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si u es L-diferenciable en μ, y en ese caso,

$$\partial_\mu u = \nabla_W u(\mu).$$

- Punto de visto más geometrico.
- El hecho $\partial_\mu u = \nabla \frac{\delta u}{\delta \mu}$ es coherente con $\partial_\mu u \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.
- La distancia al cuádrado no es siempre diferenciable.

Una implicación aparece en el caso continua en [CD18, Theorem 5.64]. Esta noción es usada en [AG08, GŚ14] para definir soluciones de viscosidad.

Continuará

Esta parte

- definición de sub/supdiferenciales

Continuará

Esta parte

- definición de sub/supdiferenciales
- el gradiente de Wasserstein

Continuará

Esta parte

- definición de sub/supdiferenciales
- el gradiente de Wasserstein

Los elementos de $\operatorname{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ son aplicaciones, y sería más general de trabajar con planos.

Continuará

Esta parte

- definición de sub/supdiferenciales
- el gradiente de Wasserstein

Los elementos de $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ son aplicaciones, y sería más general de trabajar con planos.

La próxima parte

- definición del espacio tangente general

Continuará

Esta parte

- definición de sub/supdiferenciales
- el gradiente de Wasserstein

Los elementos de $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ son aplicaciones, y sería más general de trabajar con planos.

La próxima parte

- definición del espacio tangente general
- el ejemplo de la distancia al cuádrado

¡Gracias!

[AG08] Luigi Ambrosio and Wilfrid Gangbo.
Hamiltonian ODEs in the Wasserstein space of probability measures.
Communications on Pure and Applied Mathematics, 61(1):18–53, 2008.

[AGS05] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Guiseppe Savaré.
Gradient Flows.
Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser-Verlag, Basel, 2005.

[CD18] René Carmona and François Delarue.
Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I, volume 83 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*.
Springer International Publishing, Cham, 2018.

[GŚ14] Wilfrid Gangbo and Andrzej Świech.
Optimal transport and large number of particles.
Discrete and Continuous Dynamical Systems, 34(4):1397–1441, 2014.

[GT19] Wilfrid Gangbo and Adrian Tudorascu.
On differentiability in the Wasserstein space and well-posedness for Hamilton–Jacobi equations.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 125:119–174, May 2019.