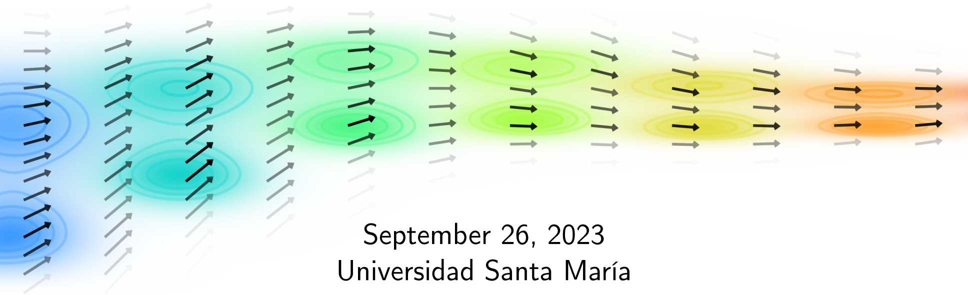
El D en EDP

Estrategías para derivación en espacios de medidas - Capítulo 2, Parte 2

Averil Prost (LMI INSA Rouen)



September 26, 2023
Universidad Santa María

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot,\cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos el lift de Lions, y la L-diferenciabilidad.

- Definición muy agradable en la práctica, manipulación de variables aleatorias.
- A pesar de la "independencia" de la definición del espacio subyacente, falta legitimidad.

En esta parte, vamos a ver otra manera de definir un gradiente de funciones suaves, y los vínculos entre los dos.

Table of Contents

Derivada lineal

Def 1 Decimos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una **derivada lineal** si existe $\frac{\delta u}{\delta \mu} \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega; \mathbb{R}\right)$ subcuadrática en x, unif. en μ t.q.

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\nu - \mu), \cdot\right), \nu - \mu \right\rangle ds, \qquad (1)$$

$\forall \mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$,

Derivada lineal

Def 1 Decimos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una **derivada lineal** si existe $\frac{\delta u}{\delta \mu} \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega; \mathbb{R}\right)$ subcuadrática en x, unif. en μ t.q.

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\nu - \mu), \cdot\right), \nu - \mu \right\rangle ds, \qquad (1)$$

$\forall \mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, con la convención $\left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot), \mu \right\rangle = 0$ para cada μ.

Derivada lineal

Def 1 Decimos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una **derivada lineal** si existe $\frac{\delta u}{\delta \mu} \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega; \mathbb{R}\right)$ subcuadrática en x, unif. en μ t.q.

$$u(\nu) - u(\mu) = \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\nu - \mu), \cdot\right), \nu - \mu \right\rangle ds, \qquad (1)$$

$\forall \mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, con la convención $\left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot), \mu \right\rangle = 0$ para cada μ.

Esta formulación parece a una derivada de Fréchet en el espacio $(\mathcal{M}, |\cdot|_{TV})$, restringida a $\mathscr{P}_2(\Omega)$. Fue usada muy antes de la resurección de las ideas de Kantorovich (ver [FV79, CLS18]). [BIRS19] la usa directamente por viscosidad, y siguemos la presentación de [CD18a, CDLL19] para la *master equation*.

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$.

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$. Luego

$$\frac{u(\omega_h) - u(\mu)}{h} =$$

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$. Luego

$$\frac{u(\omega_h) - u(\mu)}{h} = \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\omega_h - \mu), \cdot\right), \frac{\omega_h - \mu}{h} \right\rangle ds$$

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{u(\omega_h) - u(\mu)}{h} &= \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\omega_h - \mu), \cdot\right), \frac{\omega_h - \mu}{h} \right\rangle ds \\ &= \left\langle \int_{s=0}^{1} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + sh(\nu - \mu), \cdot\right) ds, \nu - \mu \right\rangle.\end{aligned}$$

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{u(\omega_h) - u(\mu)}{h} &= \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\omega_h - \mu), \cdot\right), \frac{\omega_h - \mu}{h} \right\rangle ds \\ &= \left\langle \int_{s=0}^{1} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + sh(\nu - \mu), \cdot\right) ds, \nu - \mu \right\rangle .\end{aligned}$$

La función $x \mapsto \int_{s=0}^{1} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + sh(\nu - \mu), x\right) ds$ es subcuadrática y converge puntualmente hacia $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, x)$,

Límite

Sean u linealmente diferenciable, $h > 0$ y $\omega_h = \mu + h(\nu - \mu)$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{u(\omega_h) - u(\mu)}{h} &= \int_{s=0}^{1} \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + s(\omega_h - \mu), \cdot\right), \frac{\omega_h - \mu}{h} \right\rangle ds \\ &= \left\langle \int_{s=0}^{1} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + sh(\nu - \mu), \cdot\right) ds, \nu - \mu \right\rangle.\end{aligned}$$

La función $x \mapsto \int_{s=0}^{1} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\mu + sh(\nu - \mu), x\right) ds$ es subcuadrática y converge puntualmente hacia $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, x)$, entonces el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu)}{h} = \left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot), \nu - \mu \right\rangle.$$

Ejemplo (verticalmente) lineal

Consideramos $u(\mu) = \langle \ell, \mu \rangle$ para $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ subcuádratico.

Ejemplo (verticalmente) lineal

Consideramos $u(\mu) = \langle \ell, \mu \rangle$ para $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ subcuádratico. Entonces

$$u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu) = \int_{x \in \Omega} \ell(x) d\left[\mu + h(\nu - \mu)\right](x) - \int_{x \in \Omega} \ell(x) d\mu(x)$$

Ejemplo (verticalmente) lineal

Consideramos $u(\mu) = \langle \ell, \mu \rangle$ para $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ subcuádratico. Entonces

$$\begin{aligned} u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu) &= \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\left[\mu + h(\nu - \mu)\right](x) - \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x) \\ &= h \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\left[\nu - \mu\right](x) \end{aligned}$$

Ejemplo (verticalmente) lineal

Consideramos $u(\mu) = \langle \ell, \mu \rangle$ para $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ subcuádratico. Entonces

$$\begin{aligned} u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu) &= \int_{x \in \Omega} \ell(x) d\left[\mu + h(\nu - \mu)\right](x) - \int_{x \in \Omega} \ell(x) d\mu(x) \\ &= h \int_{x \in \Omega} \ell(x) d\left[\nu - \mu\right](x) \end{aligned}$$

y tenemos directamente que $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, x) = \ell(x)$.

Ejemplo (verticalmente) cuadrático

Consideramos $u(\mu) = \int_{(x,y)\in\Omega} \ell(x,y) d[\mu \otimes \mu](x,y)$ con $\ell(x,y) \leqslant a(x) + b(y)$, a, b subcuadráticos, y notamos $\ell^t(x,y) \coloneqq \ell(y,x)$.

Ejemplo (verticalmente) cuadrático

Consideramos $u(\mu) = \int_{(x,y)\in\Omega} \ell(x,y) d[\mu \otimes \mu](x,y)$ con $\ell(x,y) \leqslant a(x) + b(y)$, a, b subcuadráticos, y notamos $\ell^t(x,y) := \ell(y,x)$. Usando la distributividad de $\otimes$ sobre el $+$,

$$u(\mu + h(\nu - \mu)) = u(\mu) + h \int \left[\ell + \ell^t\right] d[\mu \otimes (\nu - \mu)] + h^2 u(\nu - \mu).$$

Ejemplo (verticalmente) cuadrático

Consideramos $u(\mu) = \int_{(x,y)\in\Omega} \ell(x,y) d[\mu \otimes \mu](x,y)$ con $\ell(x,y) \leqslant a(x) + b(y)$, a, b subcuadráticos, y notamos $\ell^t(x,y) := \ell(y,x)$.
Usando la distributividad de $\otimes$ sobre el $+$,

$$u(\mu + h(\nu - \mu)) = u(\mu) + h \int \left[\ell + \ell^t\right] d[\mu \otimes (\nu - \mu)] + h^2 u(\nu - \mu).$$

Entonces

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu)}{h} = \int \left[\ell + \ell^t\right] d[\mu \otimes (\nu - \mu)](x,y)$$

Ejemplo (verticalmente) cuadrático

Consideramos $u(\mu) = \int_{(x,y)\in\Omega} \ell(x,y) d[\mu \otimes \mu](x,y)$ con $\ell(x,y) \leqslant a(x) + b(y)$, a, b subcuadráticos, y notamos $\ell^t(x,y) := \ell(y,x)$. Usando la distributividad de $\otimes$ sobre el $+$,

$$u(\mu + h(\nu - \mu)) = u(\mu) + h \int \left[\ell + \ell^t\right] d[\mu \otimes (\nu - \mu)] + h^2 u(\nu - \mu).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h \searrow 0} \frac{u(\mu + h(\nu - \mu)) - u(\mu)}{h} &= \int \left[\ell + \ell^t\right] d[\mu \otimes (\nu - \mu)](x,y) \\ &=: \int_{y\in\Omega} \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y) d[\nu - \mu](y),\end{aligned}$$

donde $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y) := \langle \ell(\cdot, y) + \ell^t(\cdot, y), \mu \rangle - c$.

Table of Contents

Derivada natural

Def 2 Asumamos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es linealmente diferenciable con $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ para cada μ.

Derivada natural

Def 2 Asumamos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es linealmente diferenciable con $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ para cada μ. La **derivada natural** de u, denotada $D_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$, es la función dada por

$$D_\mu u(\mu, x) \coloneqq \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, x).$$

Derivada natural

Def 2 Asumamos que $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ es linealmente diferenciable con $\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ para cada μ. La **derivada natural** de u, denotada $D_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$, es la función dada por

$$D_\mu u(\mu, x) \coloneqq \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, x).$$

Utilizamos las notaciones de [CD18a, CD18b]. Esta definición es usada en [CDLL19] para estudiar juegos de campo medio. Sin embargo, no tiene oficialmente un nombre propio.

Ejemplos

Si $u(\mu) := \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y subcuadrático, tenemos

$$D_\mu u(\mu, x) = \nabla_x \ell(x).$$

Ejemplos

Si $u(\mu) := \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y subcuadrático, tenemos

$$D_\mu u(\mu, x) = \nabla_x \ell(x).$$

Si $u(\mu) := \int_{(x,y)\in\Omega^2} \ell d[\mu \otimes \mu]$ con $\ell \in \mathcal{C}_c^1$, entonces $\forall (y, v) \in T\Omega$,

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y + hv) - \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y)}{h} \\ &= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell(x, y + hv) - \ell(x, y)}{h} + \frac{\ell(y + hv, x) - \ell(y, x)}{h} d\mu(x) \end{aligned}$$

Ejemplos

Si $u(\mu) := \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y subcuadrático, tenemos

$$D_\mu u(\mu, x) = \nabla_x \ell(x).$$

Si $u(\mu) := \int_{(x,y)\in\Omega^2} \ell d[\mu \otimes \mu]$ con $\ell \in \mathcal{C}^1_c$, entonces $\forall (y, v) \in T\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y + hv) - \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y)}{h} \\
&= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell(x, y + hv) - \ell(x, y)}{h} + \frac{\ell(y + hv, x) - \ell(y, x)}{h} d\mu(x) \\
&\xrightarrow[h\searrow 0]{} \int_{x\in\Omega} \langle \nabla_x \ell(x, y) + \nabla_y \ell(x, y), v \rangle \, d\mu(x) =: \langle D_\mu u(\mu, y), v \rangle ,
\end{aligned}$$

Ejemplos

Si $u(\mu) := \langle \ell, \mu \rangle$ con $\ell \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y subcuadrático, tenemos

$$D_\mu u(\mu, x) = \nabla_x \ell(x).$$

Si $u(\mu) := \int_{(x,y)\in\Omega^2} \ell d[\mu \otimes \mu]$ con $\ell \in \mathcal{C}_c^1$, entonces $\forall (y, v) \in T\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y + hv) - \frac{\delta u}{\delta \mu}(\mu, y)}{h} \\
&= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell(x, y + hv) - \ell(x, y)}{h} + \frac{\ell(y + hv, x) - \ell(y, x)}{h} d\mu(x) \\
&\xrightarrow[h\searrow 0]{} \int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell(x, y) + \nabla_y \ell(x, y), v \right\rangle d\mu(x) =: \left\langle D_\mu u(\mu, y), v \right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\text{donde} \quad D_\mu u(\mu, y) := \int_{x\in\Omega} \nabla_x \ell(x, y) + \nabla_y \ell(x, y) d\mu(x).$$

Table of Contents

Relación con la L-derivada

Coincidencia ([CD18a, Prop. 5.48] y [CDLL19, Appx A]) Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que se cumple unos de

- u tiene una L-derivada $\partial_\mu u$ que es globalmente Lipschitz,
- u tiene una derivada natural $D_\mu u$ que es globalmente Lipschitz.

Relación con la L-derivada

Coincidencia ([CD18a, Prop. 5.48] y [CDLL19, Appx A]) Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que se cumple unos de

- u tiene una L-derivada $\partial_\mu u$ que es globalmente Lipschitz,
- u tiene una derivada natural $D_\mu u$ que es globalmente Lipschitz.

Entonces el otro punto se cumple, y

$$\partial_\mu u(\mu, x) = D_\mu u(\mu, x) \qquad \forall (\mu, x) \in \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega.$$

Relación con la L-derivada

Coincidencia ([CD18a, Prop. 5.48] y [CDLL19, Appx A]) Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que se cumple unos de

- u tiene una L-derivada $\partial_\mu u$ que es globalmente Lipschitz,
- u tiene una derivada natural $D_\mu u$ que es globalmente Lipschitz.

Entonces el otro punto se cumple, y

$$\partial_\mu u(\mu, x) = D_\mu u(\mu, x) \qquad \forall(\mu, x) \in \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega.$$

Remark

- Las hipótesis no son optimales.

Relación con la L-derivada

Coincidencia ([CD18a, Prop. 5.48] y [CDLL19, Appx A]) Sea $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que se cumple unos de

- u tiene una L-derivada $\partial_\mu u$ que es globalmente Lipschitz,
- u tiene una derivada natural $D_\mu u$ que es globalmente Lipschitz.

Entonces el otro punto se cumple, y

$$\partial_\mu u(\mu, x) = D_\mu u(\mu, x) \qquad \forall (\mu, x) \in \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega.$$

Remark

- Las hipótesis no son optimales.
- Es razonable de creer que ambas definiciones serán llamadas L-derivada en el próximo futuro.

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A.

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A. Sea $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espacio medido sin átomos, y el lift de u

$$U : L^2_{\mathbb{P}}(E; \Omega) \to \mathbb{R}, \qquad U(X) := u(\mathsf{Ley}(X)).$$

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A. Sea $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espacio medido sin átomos, y el lift de u

$$U : L^2_{\mathbb{P}}(E;\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad U(X) := u(\mathsf{Ley}(X)).$$

Buscamos una aplicación $\partial_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$ tal que $\forall X \in \mathsf{Ley}^{-1}(\mu)$,

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{U(X+hY) - U(X)}{h} = \langle \partial_\mu u(\mu, \cdot) \circ X, Y \rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} \quad \forall Y \in L^2_{\mathbb{P}}.$$

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A. Sea $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espacio medido sin átomos, y el lift de u

$$U : L^2_{\mathbb{P}}(E; \Omega) \to \mathbb{R}, \qquad U(X) := u(\mathsf{Ley}(X)).$$

Buscamos una aplicación $\partial_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$ tal que $\forall X \in \mathsf{Ley}^{-1}(\mu)$,

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{U(X + hY) - U(X)}{h} = \langle \partial_\mu u(\mu, \cdot) \circ X, Y \rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} \quad \forall Y \in L^2_{\mathbb{P}}.$$

Sea $Y \in L^2_{\mathbb{P}}(E; T\Omega)$, y $\omega_s := (1 - s)\mathsf{Ley}(X) + s\mathsf{Ley}(X + hY)$.

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A. Sea $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espacio medido sin átomos, y el lift de u

$$U : L^2_{\mathbb{P}}(E; \Omega) \to \mathbb{R}, \qquad U(X) := u(\text{Ley}(X)).$$

Buscamos una aplicación $\partial_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$ tal que $\forall X \in \text{Ley}^{-1}(\mu)$,

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{U(X + hY) - U(X)}{h} = \langle \partial_\mu u(\mu, \cdot) \circ X, Y \rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} \quad \forall Y \in L^2_{\mathbb{P}}.$$

Sea $Y \in L^2_{\mathbb{P}}(E; T\Omega)$, y $\omega_s := (1 - s)\text{Ley}(X) + s\text{Ley}(X + hY)$. Luego

$$U(X + hY) - U(X) = u(\text{Ley}(X + hY)) - u(\text{Ley}(X))$$

Una implicancia (1/3)

Asumamos que u tiene una derivada natural $D_\mu u$, cuya constante Lipschitz notamos A. Sea $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espacio medido sin átomos, y el lift de u

$$U : L^2_{\mathbb{P}}(E; \Omega) \to \mathbb{R}, \qquad U(X) := u(\mathsf{Ley}(X)).$$

Buscamos una aplicación $\partial_\mu u : \mathscr{P}_2(\Omega) \times \Omega \to T\Omega$ tal que $\forall X \in \mathsf{Ley}^{-1}(\mu)$,

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{U(X + hY) - U(X)}{h} = \langle \partial_\mu u(\mu, \cdot) \circ X, Y \rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} \quad \forall Y \in L^2_{\mathbb{P}}.$$

Sea $Y \in L^2_{\mathbb{P}}(E; T\Omega)$, y $\omega_s := (1 - s)\mathsf{Ley}(X) + s\mathsf{Ley}(X + hY)$. Luego

$$\begin{aligned} U(X + hY) - U(X) &= u(\mathsf{Ley}(X + hY)) - u(\mathsf{Ley}(X)) \\ &= \int_{s=0}^{1} \underbrace{\left\langle \frac{\delta u}{\delta \mu}(\omega_s, \cdot), \mathsf{Ley}(X + hY) - \mathsf{Ley}(X) \right\rangle}_{\mathcal{A}_s} ds. \end{aligned}$$

Una implicancia (2/3)

Pero para cada $s \in [0,1]$,

$$\mathcal{A}_s = \int_{z \in E} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z) + hY(z)\right) - \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)\right) d\mathbb{P}(z)$$

Una implicancia (2/3)

Pero para cada $s \in [0,1]$,

$$\mathcal{A}_s = \int_{z\in E} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z) + hY(z)\right) - \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)\right) d\mathbb{P}(z)$$

$$= h \int_{z\in E} \int_{\lambda=0}^{1} \underbrace{\left\langle \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z) + h\lambda Y(z)\right), Y(z)\right\rangle}_{\mathcal{B}_h} d\lambda d\mathbb{P}(z).$$

Una implicancia (2/3)

Pero para cada $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s &= \int_{z\in E} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)+hY(z)\right) - \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)\right) d\mathbb{P}(z) \\ &= h \int_{z\in E} \int_{\lambda=0}^{1} \underbrace{\left\langle \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)+h\lambda Y(z)\right), Y(z) \right\rangle}_{\mathcal{B}_h} d\lambda d\mathbb{P}(z).\end{aligned}$$

Por definición, $\nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu} = D_\mu u$.

Una implicancia (2/3)

Pero para cada $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s &= \int_{z\in E} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z) + hY(z)\right) - \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)\right) d\mathbb{P}(z) \\ &= h \int_{z\in E} \int_{\lambda=0}^{1} \underbrace{\left\langle \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z) + h\lambda Y(z)\right), Y(z) \right\rangle}_{\mathcal{B}_h} d\lambda d\mathbb{P}(z).\end{aligned}$$

Por definición, $\nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu} = D_\mu u$. Notamos que

$$\left|\mathcal{B}_h - \langle D_\mu u(\omega_s, X(z)), Y(z)\rangle\right| \leqslant Ah\lambda \left|Y(z)\right|^2,$$

Una implicancia (2/3)

Pero para cada $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s &= \int_{z\in E} \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)+hY(z)\right) - \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)\right) d\mathbb{P}(z) \\ &= h\int_{z\in E}\int_{\lambda=0}^{1} \underbrace{\left\langle \nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu}\left(\omega_s, X(z)+h\lambda Y(z)\right), Y(z)\right\rangle}_{\mathcal{B}_h} d\lambda d\mathbb{P}(z).\end{aligned}$$

Por definición, $\nabla_x \frac{\delta u}{\delta \mu} = D_\mu u$. Notamos que

$$\left|\mathcal{B}_h - \langle D_\mu u(\omega_s, X(z)), Y(z)\rangle\right| \leqslant Ah\lambda \left|Y(z)\right|^2,$$

y para cada $y \in \Omega$,

$$\left|D_\mu u(\omega_s, y) - D_\mu u(\omega_0, y)\right| \leqslant Asd_{\mathcal{W}}\left(\mathsf{Ley}(X+hY), \mathsf{Ley}(X)\right).$$

Una implicancia (3/3)

Si notamos $\mu = \text{Ley}(X)$ y $\nu = \text{Ley}(X + hY)$, el plano $(X, X + hY)\#\mathbb{P}$ pertenece a $\Gamma(\mu, \nu)$, y

$$d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu) \leqslant \int_{z \in \mathbb{P}} |X(z) - (X(z) + hY(z))|^2 \, d\mathbb{P}(z) = h^2 \|Y\|_{\mathbb{P}}^2.$$

Una implicancia (3/3)

Si notamos $\mu = \text{Ley}(X)$ y $\nu = \text{Ley}(X + hY)$, el plano $(X, X + hY)\#\mathbb{P}$ pertenece a $\Gamma(\mu, \nu)$, y

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) \leqslant \int_{z \in \mathbb{P}} |X(z) - (X(z) + hY(z))|^2 \, d\mathbb{P}(z) = h^2 \|Y\|^2_{\mathbb{P}}.$$

Luego,

$$\frac{|\mathcal{B}_h - \langle D_\mu u(\mu, X(z)), Y(z)\rangle|}{h} \leqslant A\,|Y(z)|\,(\lambda\,|Y(z)| + s\|Y\|_{\mathbb{P}}) \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{P}}.$$

Una implicancia (3/3)

Si notamos $\mu = \text{Ley}(X)$ y $\nu = \text{Ley}(X + hY)$, el plano $(X, X + hY)\#\mathbb{P}$ pertenece a $\Gamma(\mu, \nu)$, y

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) \leqslant \int_{z \in \mathbb{P}} |X(z) - (X(z) + hY(z))|^2 \, d\mathbb{P}(z) = h^2 \|Y\|^2_{\mathbb{P}}.$$

Luego,

$$\frac{|\mathcal{B}_h - \langle D_\mu u(\mu, X(z)), Y(z)\rangle|}{h} \leqslant A\,|Y(z)|\,(\lambda\,|Y(z)| + s\|Y\|_{\mathbb{P}}) \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{P}}.$$

Entonces podemos pasar al límite y

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{U(X + hY) - U(X)}{h} = \int_{z \in E} \int_{\lambda = 0}^{1} \langle D_\mu u\,(\omega_0, X(z))\,, Y(z)\rangle \, d\lambda d\mathbb{P}(z)$$

Una implicancia (3/3)

Si notamos $\mu = \text{Ley}(X)$ y $\nu = \text{Ley}(X + hY)$, el plano $(X, X + hY)\#\mathbb{P}$ pertenece a $\Gamma(\mu, \nu)$, y

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) \leqslant \int_{z\in\mathbb{P}} |X(z) - (X(z) + hY(z))|^2 \, d\mathbb{P}(z) = h^2 \|Y\|^2_{\mathbb{P}}.$$

Luego,

$$\frac{|\mathcal{B}_h - \langle D_\mu u(\mu, X(z)), Y(z)\rangle|}{h} \leqslant A\,|Y(z)|\,(\lambda\,|Y(z)| + s\|Y\|_{\mathbb{P}}) \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{P}}.$$

Entonces podemos pasar al límite y

$$\begin{aligned}\lim_{h\searrow 0} \frac{U(X + hY) - U(X)}{h} &= \int_{z\in E} \int_{\lambda=0}^{1} \langle D_\mu u\,(\omega_0, X(z))\,, Y(z)\rangle \, d\lambda d\mathbb{P}(z) \\ &= \langle D_\mu u(\mu, \cdot) \circ X, Y\rangle_{L^2_{\mathbb{P}}}\,.\end{aligned}$$

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \text{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \mathsf{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \mathsf{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \mathsf{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \mathsf{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

Entonces $\mu_\varepsilon(t) := Z_t^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon$ (nada trivial). Luego

$$0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(Z_t^\varepsilon) - U(Z_0^\varepsilon)}{t}$$

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \text{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

Entonces $\mu_\varepsilon(t) := Z_t^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon$ (nada trivial). Luego

$$0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(Z_t^\varepsilon) - U(Z_0^\varepsilon)}{t} = \left\langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, Z_0^\varepsilon), \dot{Z}_0^\varepsilon \right\rangle_{L^2_\mathbb{P}}$$

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \text{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

Entonces $\mu_\varepsilon(t) := Z_t^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon$ (nada trivial). Luego

$$0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(Z_t^\varepsilon) - U(Z_0^\varepsilon)}{t} = \left\langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, Z_0^\varepsilon), \dot{Z}_0^\varepsilon \right\rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} = \langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, \cdot), b \rangle_{L^2_{\text{Leb}}}.$$

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \text{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

Entonces $\mu_\varepsilon(t) := Z_t^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon$ (nada trivial). Luego

$$0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(Z_t^\varepsilon) - U(Z_0^\varepsilon)}{t} = \left\langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, Z_0^\varepsilon), \dot{Z}_0^\varepsilon \right\rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} = \langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, \cdot), b \rangle_{L^2_{\text{Leb}}}.$$

Así el campo $x \mapsto \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, x)$ es el gradiente de una aplicación p_ε.

Ideas de la otra

Asumamos que u es L-diferenciable con $\partial_\mu u$ Lipschitz, y sea $\mu = \text{Ley}(X)$.

- Para $\varepsilon > 0$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep. de X, $\mu_\varepsilon := \text{Ley}(X + \varepsilon Y) = m_\varepsilon \text{Leb}$.
- Sea $b \in \mathcal{C}^1(\Omega; T\Omega)$ suave con divergencia cero, y Z^ε solución de

$$\frac{d}{dt} Z_t^\varepsilon = \frac{b}{m_\varepsilon}(Z_t^\varepsilon), \qquad \text{Ley}(Z_0^\varepsilon) = Z_0^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon.$$

  Entonces $\mu_\varepsilon(t) := Z_t^\varepsilon \# \mathbb{P} = \mu_\varepsilon$ (nada trivial). Luego

$$0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(Z_t^\varepsilon) - U(Z_0^\varepsilon)}{t} = \left\langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, Z_0^\varepsilon), \dot{Z}_0^\varepsilon \right\rangle_{L^2_{\mathbb{P}}} = \langle \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, \cdot), b \rangle_{L^2_{\text{Leb}}}.$$

  Así el campo $x \mapsto \partial_\mu u(\mu_\varepsilon, x)$ es el gradiente de una aplicación p_ε.
- Usando la regla de la cadena por la L-derivada con buenas elecciones de lifts, podemos concluir (montones de detalles).

Continuará

Esta parte

- definición de la derivada lineal y natural

Continuará

Esta parte

- definición de la derivada lineal y natural
- bajo condiciones de suavidad, igualdad con el L-gradiente

Continuará

Esta parte

- definición de la derivada lineal y natural
- bajo condiciones de suavidad, igualdad con el L-gradiente

Con esta definición intrínsica, se pueden estudiar funciones *suaves* de medidas. Sin embargo, queríamos definir sub y superdiferenciales.

Continuará

Esta parte

- definición de la derivada lineal y natural
- bajo condiciones de suavidad, igualdad con el L-gradiente

Con esta definición intrínsica, se pueden estudiar funciones *suaves* de medidas. Sin embargo, queríamos definir sub y superdiferenciales.

El próximo capítulo

- definición del espacio tangente regular

Continuará

Esta parte

- definición de la derivada lineal y natural
- bajo condiciones de suavidad, igualdad con el L-gradiente

Con esta definición intrínsica, se pueden estudiar funciones *suaves* de medidas. Sin embargo, queríamos definir sub y superdiferenciales.

El próximo capítulo

- definición del espacio tangente regular
- el "gradiente de Wasserstein" de Ambrosio-Gangbo

¡Gracias!

[BIRS19] Matteo Burzoni, Vicenzo Ignazio, A. Max Reppen, and H. Mete Soner.
Viscosity Solutions for Controlled McKean-Vlasov Jump-Diffusions.
2019.

[CD18a] René Carmona and François Delarue.
Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I, volume 83 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*.
Springer International Publishing, Cham, 2018.

[CD18b] René Carmona and François Delarue.
Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications II, volume 84 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*.
Springer International Publishing, Cham, 2018.

[CDLL19] Pierre Cardaliaguet, François Delarue, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions.
The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games.
Number 201 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2019.

[CLS18] Christa Cuchiero, Martin Larsson, and Sara Svaluto-Ferro.
Probability measure-valued polynomial diffusions, July 2018.

[FV79] Wendell H. Fleming and Michel Viot.
Some Measure-Valued Markov Processes in Population Genetics Theory.
Indiana University Mathematics Journal, 28(5):817–843, 1979.