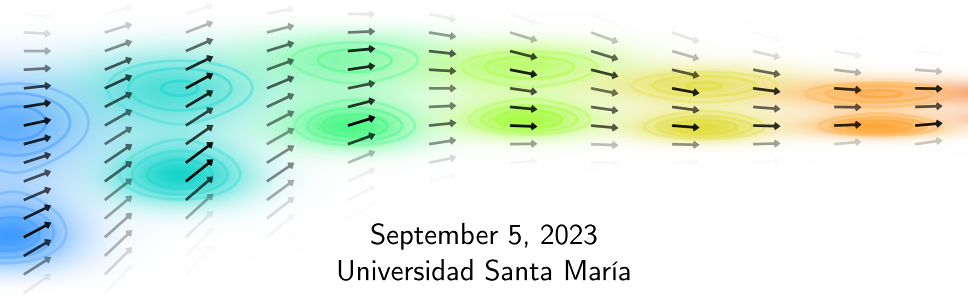
El D en EDP

Estrategías para derivación en espacios de medidas - Capítulo 1

Averil Prost (LMI INSA Rouen)



September 5, 2023
Universidad Santa María

Introducción y notaciones

Sea $\Omega = \mathbb{R}^d$. Notamos $\mathscr{P}(\Omega)$ las medidas de probabilidad, y

$$\mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \left\{ \mu \in \mathscr{P}(\Omega) \;\middle|\; \int_{x \in \Omega} d^2(x, 0) d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Introducción y notaciones

Sea $\Omega = \mathbb{R}^d$. Notamos $\mathscr{P}(\Omega)$ las medidas de probabilidad, y

$$\mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \left\{ \mu \in \mathscr{P}(\Omega) \;\middle|\; \int_{x\in\Omega} d^2(x,0) d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Para $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2$, sea $\Gamma(\mu,\nu) \coloneqq \left\{ \eta \in \mathscr{P}(\Omega^2) \;\middle|\; \pi_x \# \eta = \mu,\ \pi_y \# \eta = \nu \right\}$.

Introducción y notaciones

Sea $\Omega = \mathbb{R}^d$. Notamos $\mathscr{P}(\Omega)$ las medidas de probabilidad, y

$$\mathscr{P}_2(\Omega) := \left\{ \mu \in \mathscr{P}(\Omega) \;\middle|\; \int_{x\in\Omega} d^2(x,0)d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Para $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2$, sea $\Gamma(\mu,\nu) := \left\{ \eta \in \mathscr{P}(\Omega^2) \;\middle|\; \pi_x\#\eta = \mu,\ \pi_y\#\eta = \nu \right\}$.

Def 1 – Distancia de Wasserstein Notamos

$$d^2_{\mathcal{W}}(\mu,\nu) := \inf_{\eta\in\Gamma(\mu,\nu)} \int_{(x,y)\in\Omega^2} d^2(x,y)d\eta(x,y).$$

Llamamos $(\mathscr{P}_2(\Omega), d_{\mathcal{W}})$ el *espacio de Wasserstein*.

Motivación y plano general

Dado $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, ¿Cómo se puede definir $\nabla_\mu u$?

Motivación y plano general

Dado $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, ¿Cómo se puede definir $\nabla_\mu u$?

Objetivo: dar sentido a ecuaciones diferenciales como (por ejemplo)

$$-\partial_t u(t,\mu) + H(\mu, \nabla_\mu u(t,\mu)) = 0, \qquad u(T,\mu) = g(\mu). \tag{1}$$

Motivación y plano general

Dado $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, ¿Cómo se puede definir $\nabla_\mu u$?

Objetivo: dar sentido a ecuaciones diferenciales como (por ejemplo)

$$-\partial_t u(t,\mu) + H(\mu, \nabla_\mu u(t,\mu)) = 0, \qquad u(T,\mu) = g(\mu). \tag{1}$$

Plano Revisión de la literatura. Vamos del "más suave" al "menos suave".

- **Capítulo 1** Definición con distribución
- **Capítulo 2 (dos partes)** La idea de Lions: **levantamiento/lift**
- **Capítulo 3 (dos partes)** Sub y superdiferenciales
- **Capítulo 4** El caso métrico

Motivación y plano general

Dado $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, ¿Cómo se puede definir $\nabla_\mu u$?

Objetivo: dar sentido a ecuaciones diferenciales como (por ejemplo)

$$-\partial_t u(t,\mu) + H(\mu, \nabla_\mu u(t,\mu)) = 0, \qquad u(T,\mu) = g(\mu). \tag{1}$$

Plano Revisión de la literatura. Vamos del "más suave" al "menos suave".

- **Capítulo 1** Definición con distribución
- **Capítulo 2 (dos partes)** La idea de Lions: **levantamiento/lift**
- **Capítulo 3 (dos partes)** Sub y superdiferenciales
- **Capítulo 4** El caso métrico

Vocabulario y notaciones pueden ser diferentes de la literatura.

Table of Contents

Ecuación de continuidad

Def 2 Una curva $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ es **absolutamente continua** si

$$\exists\, m \in L^1(0,T) \quad \text{t.q.} \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_t,\mu_s) \leqslant \int_{\tau=s}^{t} m(\tau)d\tau \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Ecuación de continuidad

Def 2 Una curva $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ es **absolutamente continua** si

$$\exists\, m \in L^1(0,T) \quad \text{t.q.} \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_t, \mu_s) \leqslant \int_{\tau=s}^{t} m(\tau) d\tau \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Para $b : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ un campo vectorial y $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, consideramos

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\,(\mu_t b) = 0 \quad t \in]0,T[, \qquad \mu_0 = \nu. \tag{2}$$

Ecuación de continuidad

Def 2 Una curva $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ es **absolutamente continua** si

$$\exists\, m \in L^1(0,T) \quad \text{t.q.} \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_t,\mu_s) \leqslant \int_{\tau=s}^{t} m(\tau)d\tau \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Para $b : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ un campo vectorial y $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, consideramos

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\,(\mu_t b) = 0 \quad t \in]0,T[, \qquad \mu_0 = \nu. \tag{2}$$

Def 3 La curva $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ es una **solución de (2)** si es absolutamente continua, $\mu_0 = \nu$, y para todos $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[\times\Omega;\mathbb{R})$,

$$\int_{x\in\Omega} \partial_t\varphi(t,x) + \langle \nabla_x\varphi(t,x), b(x)\rangle\, d\mu_t(x) = 0 \quad \mathring{\forall}\, t \in [0,T].$$

Interpretación en un caso suave

Supongamos que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; T\mathbb{R}^d)$, y que $\mu_t = \rho(t, \cdot)\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y $\rho \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$.

Interpretación en un caso suave

Supongamos que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; T\mathbb{R}^d)$, y que $\mu_t = \rho(t,\cdot)\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y $\rho \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\Omega)$. Luego

$$0 = \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} \left[\partial_t\varphi(t,x) + \langle \nabla_x\varphi(t,x), b(x)\rangle\right] \rho(t,x) dt\, dx$$

Interpretación en un caso suave

Supongamos que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; T\mathbb{R}^d)$, y que $\mu_t = \rho(t,\cdot)\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y $\rho \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} \left[\partial_t \varphi(t,x) + \langle \nabla_x \varphi(t,x), b(x)\rangle\right] \rho(t,x) dt\, dx \\ &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} -\varphi(t,x) \left[\partial_t \rho(t,x) + \operatorname{div}\left(\rho(t,x) b(x)\right)\right] dt\, dx. \end{aligned}$$

Interpretación en un caso suave

Supongamos que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; T\mathbb{R}^d)$, y que $\mu_t = \rho(t,\cdot)\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y $\rho \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} \left[\partial_t\varphi(t,x) + \langle \nabla_x\varphi(t,x), b(x)\rangle\right]\rho(t,x)dt\,dx \\ &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} -\varphi(t,x)\left[\partial_t\rho(t,x) + \operatorname{div}\left(\rho(t,x)b(x)\right)\right]dt\,dx. \end{aligned}$$

Entonces la función ρ satisface

$$\partial_t\rho(t,x) = -\operatorname{div}\left(\rho(t,x)b(x)\right) = -\langle\nabla\rho(t,x), b(x)\rangle - \rho(x)\operatorname{div}(b)(x). \quad (3)$$

Interpretación en un caso suave

Supongamos que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; T\mathbb{R}^d)$, y que $\mu_t = \rho(t,\cdot)\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue y $\rho \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} \left[\partial_t \varphi(t,x) + \langle \nabla_x \varphi(t,x), b(x)\rangle\right] \rho(t,x) dt\, dx \\ &= \int_{(t,x)\in[0,T]\times\Omega} -\varphi(t,x) \left[\partial_t \rho(t,x) + \operatorname{div}\left(\rho(t,x) b(x)\right)\right] dt\, dx. \end{aligned}$$

Entonces la función ρ satisface

$$\partial_t \rho(t,x) = -\operatorname{div}\left(\rho(t,x)b(x)\right) = -\langle \nabla \rho(t,x), b(x)\rangle - \rho(x) \operatorname{div}(b)(x). \quad (3)$$

Remark – Cuidado (3) es una perturbación de la ecuación de transporte. Si $\operatorname{div}(b) = 0$ (velocidad de flujo incompresible), transporte. En el caso importante $b = \nabla\psi$, la perturbación se vuelve $-\rho\Delta\psi$.

Teorema de Cauchy en Wasserstein

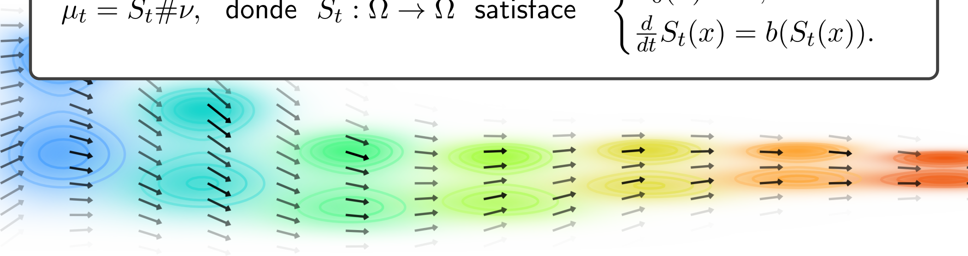
Problema bien definido Supongamos que $b : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ es Lipschitz y acotado. Existe una única solución de (2), dada por

$$\mu_t = S_t \# \nu, \quad \text{donde} \quad S_t : \Omega \to \Omega \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} S_0(x) = x, \\ \frac{d}{dt} S_t(x) = b(S_t(x)). \end{cases}$$

Teorema de Cauchy en Wasserstein

Problema bien definido Supongamos que $b : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ es Lipschitz y acotado. Existe una única solución de (2), dada por

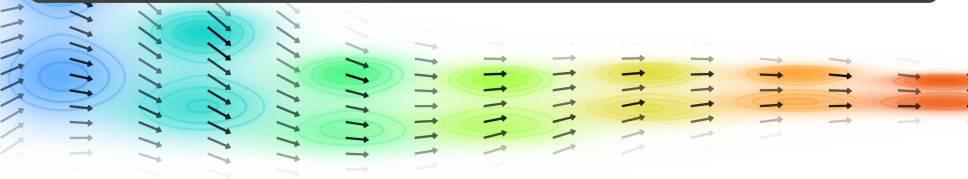
$$\mu_t = S_t \# \nu, \quad \text{donde} \quad S_t : \Omega \to \Omega \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} S_0(x) = x, \\ \frac{d}{dt} S_t(x) = b(S_t(x)). \end{cases}$$



Teorema de Cauchy en Wasserstein

Problema bien definido Supongamos que $b : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ es Lipschitz y acotado. Existe una única solución de (2), dada por

$$\mu_t = S_t \# \nu, \quad \text{donde} \quad S_t : \Omega \to \Omega \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} S_0(x) = x, \\ \frac{d}{dt} S_t(x) = b(S_t(x)). \end{cases}$$



Manera de mover *sin dividir masa*. Generalizaciones con campos continuos [AGS05], imagen en medidas [Pic19], inclusiones [BF21] (ver con Ernesto).

Aproximación

Supongamos que b es $[b]$-Lipschitz y $|b|_\infty$ $-$acotado.

Aproximación

Supongamos que b es $[b]$-Lipschitz y $|b|_\infty$ −acotado. Luego

$$|S_t(x) - (x + tb(x))| \leqslant \int_{\tau=0}^{t} |b(S_\tau(x)) - b(x)| \, d\tau$$

Aproximación

Supongamos que b es $[b]$-Lipschitz y $|b|_\infty$ −acotado. Luego

$$\begin{aligned}|S_t(x) - (x + tb(x))| &\leqslant \int_{\tau=0}^{t} |b(S_\tau(x)) - b(x)|\, d\tau \\ &\leqslant [b] \int_{\tau=0}^{t} |S_\tau(x) - x|\, d\tau \leqslant \frac{[b]\,|b|_\infty}{2} t^2.\end{aligned}$$

Aproximación

Supongamos que b es $[b]$-Lipschitz y $|b|_\infty$ −acotado. Luego

$$\begin{aligned} |S_t(x) - (x + tb(x))| &\leqslant \int_{\tau=0}^{t} |b(S_\tau(x)) - b(x)| \, d\tau \\ &\leqslant [b] \int_{\tau=0}^{t} |S_\tau(x) - x| \, d\tau \leqslant \frac{[b] \, |b|_\infty}{2} t^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, la curva $t \mapsto \hat{\mu}_t := (id + tb)\#\nu$ satisface

$$d_{\mathcal{W}}(\mu_t, \hat{\mu}_t) \leqslant \sqrt{\int_{x\in\Omega} |S_t(x) - (x + tb(x))|^2 \, d\mu(x)} \leqslant \frac{[b] \, |b|_\infty}{2} t^2. \tag{4}$$

Aproximación

Supongamos que b es $[b]$-Lipschitz y $|b|_\infty$ −acotado. Luego

$$\begin{aligned}|S_t(x) - (x + tb(x))| &\leqslant \int_{\tau=0}^{t} |b(S_\tau(x)) - b(x)|\, d\tau \\ &\leqslant [b] \int_{\tau=0}^{t} |S_\tau(x) - x|\, d\tau \leqslant \frac{[b]\,|b|_\infty}{2} t^2.\end{aligned}$$

En consecuencia, la curva $t \mapsto \hat{\mu}_t := (id + tb)\#\nu$ satisface

$$d_{\mathcal{W}}(\mu_t, \hat{\mu}_t) \leqslant \sqrt{\int_{x\in\Omega} |S_t(x) - (x + tb(x))|^2\, d\mu(x)} \leqslant \frac{[b]\,|b|_\infty}{2} t^2. \tag{4}$$

Remark 1 La curva $\hat{\mu}_t$ tiene el papel de linealización de $t \mapsto \mu_t$.

Table of Contents

Una definición con distribuciones

Para cada $p \in \mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, notamos $(\mu_t^{\nu,p})_{t\in[0,h]}$ la solución de

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mu_t \nabla p) = 0, \qquad \mu_0 = \nu.$$

Una definición con distribuciones

Para cada $p \in \mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, notamos $(\mu_t^{\nu,p})_{t\in[0,h]}$ la solución de

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mu_t \nabla p) = 0, \qquad \mu_0 = \nu.$$

Def 4 Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una **derivada en el sentido de distribuciones** si existe $\operatorname{grad}_\nu u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} = \langle \operatorname{grad}_\nu u, p\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \qquad \forall p \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Una definición con distribuciones

Para cada $p \in \mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, notamos $(\mu_t^{\nu,p})_{t\in[0,h]}$ la solución de

$$\partial_t \mu_t + \text{div}\,(\mu_t \nabla p) = 0, \qquad \mu_0 = \nu.$$

Def 4 Una aplicación $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una **derivada en el sentido de distribuciones** si existe $\text{grad}_\nu u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} = \langle \text{grad}_\nu u, p\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \qquad \forall p \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Formulación que tiene origenes en el "cálculo de Otto" [Ott01].
⚠ Seguimos la interpretación de [Vil09], pero F. Otto introdujó una estructura riemanniana formal (ver [ABS21, Lect. 18]). ⚠
Def 4 es usada en [FK09, FN12] para estudiar ecuaciones de HJ.

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$.

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$. Para $h > 0$,

$$\frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} = \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(S_h^p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x)$$

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$. Para $h > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} &= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(S_h^p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \\
&\in \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(x + h\nabla p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \pm h\,[\ell]\, C_p
\end{aligned}
$$

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x)d\mu(x)$. Para $h > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} &= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(S_h^p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \\
&\in \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(x + h\nabla p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \pm h\left[\ell\right] C_p \\
&\xrightarrow[h\searrow 0]{} \int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell, \nabla_x p \right\rangle d\nu(x).
\end{aligned}
$$

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$. Para $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} &= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(S_h^p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \\
&\in \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(x + h\nabla p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \pm h\left[\ell\right] C_p \\
&\xrightarrow[h\searrow 0]{} \int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell, \nabla_x p \right\rangle d\nu(x).
\end{aligned}$$

Por definición de la divergencia,

$$\int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell, \nabla_x p \right\rangle d\nu(x) = -\left\langle \operatorname{div}\left(\nu \nabla \ell\right), p \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Ejemplo: aplicación lineal

Sea $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y notamos $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} \ell(x) d\mu(x)$. Para $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{u(\mu_h^{\nu,p}) - u(\nu)}{h} &= \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(S_h^p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \\
&\in \int_{x\in\Omega} \frac{\ell\left(x + h\nabla p(x)\right) - \ell(x)}{h} d\nu(x) \pm h\left[\ell\right] C_p \\
&\xrightarrow[h \searrow 0]{} \int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell, \nabla_x p \right\rangle d\nu(x).
\end{aligned}$$

Por definición de la divergencia,

$$\int_{x\in\Omega} \left\langle \nabla_x \ell, \nabla_x p \right\rangle d\nu(x) = -\left\langle \operatorname{div}\left(\nu \nabla \ell\right), p \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Así que $\operatorname{grad}_\nu u = -\operatorname{div}\left(\nu \nabla \ell\right)$.

Table of Contents

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$.

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) := \int_{x \in \Omega} U(\rho(x)) d\mathcal{L}(x)$.

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\mathrm{grad}_\nu u = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho_0 \nabla [U' \circ \rho_0]\right). \tag{5}$$

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\mathrm{grad}_\nu u = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho_0 \nabla[U' \circ \rho_0]\right). \quad (5)$$

Recordemos que $\partial_t \rho(t,x) = -\,\mathrm{div}\,(\rho(t,\cdot)\nabla p)$ (según (3)). Entonces

$$\frac{du(\mu_\cdot^{\nu,p})}{dh}_{|0} = \int_{x\in\Omega} \frac{d}{dh}_{|h=0} U(\rho(h,x))dx$$

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) \coloneqq \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\mathrm{grad}_\nu u = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho_0 \nabla[U' \circ \rho_0]\right). \tag{5}$$

Recordemos que $\partial_t \rho(t,x) = -\,\mathrm{div}\,(\rho(t,\cdot)\nabla p)$ (según (3)). Entonces

$$\frac{du(\mu_\cdot^{\nu,p})}{dh}_{|0} = \int_{x\in\Omega} \frac{d}{dh}_{|h=0} U(\rho(h,x))dx = \int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\partial_{h|0}\rho dx$$

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\operatorname{grad}_\nu u = -\operatorname{div}\left(\rho_0 \nabla[U' \circ \rho_0]\right). \tag{5}$$

Recordemos que $\partial_t \rho(t,x) = -\operatorname{div}(\rho(t,\cdot)\nabla p)$ (según (3)). Entonces

$$\frac{du(\mu_\cdot^{\nu,p})}{dh}_{|0} = \int_{x\in\Omega} \frac{d}{dh}_{|h=0} U(\rho(h,x))dx = \int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\partial_{h|0}\rho dx$$
$$= -\int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\operatorname{div}(\rho_0 \nabla_x p)\, dx$$

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\mathrm{grad}_\nu u = -\operatorname{div}\left(\rho_0 \nabla [U' \circ \rho_0]\right). \tag{5}$$

Recordemos que $\partial_t \rho(t,x) = -\operatorname{div}(\rho(t,\cdot)\nabla p)$ (según (3)). Entonces

$$\frac{du(\mu_\cdot^{\nu,p})}{dh}_{|0} = \int_{x\in\Omega} \frac{d}{dh}_{|h=0} U(\rho(h,x))dx = \int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\partial_{h|0}\rho dx$$
$$= -\int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\operatorname{div}\left(\rho_0 \nabla_x p\right) dx = \int_{x\in\Omega} \left\langle \rho_0 \nabla[U' \circ \rho_0], \nabla_x p\right\rangle dx$$

Función de la densidad

Fórmula [Vil09, 15.2] Consideramos medidas con una densidad suave ρ_0 respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$. Dado $U \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, sea $u(\mu) := \int_{x\in\Omega} U(\rho(x))d\mathcal{L}(x)$. Entonces

$$\mathrm{grad}_\nu u = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho_0 \nabla[U' \circ \rho_0]\right). \tag{5}$$

Recordemos que $\partial_t \rho(t,x) = -\,\mathrm{div}\,(\rho(t,\cdot)\nabla p)$ (según (3)). Entonces

$$\begin{aligned}\frac{du(\mu_\cdot^{\nu,p})}{dh}_{|0} &= \int_{x\in\Omega} \frac{d}{dh}_{|h=0} U(\rho(h,x))dx = \int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\partial_{h|0}\rho dx \\ &= -\int_{x\in\Omega} U'(\rho_0)\,\mathrm{div}\,(\rho_0\nabla_x p)\,dx = \int_{x\in\Omega} \langle \rho_0 \nabla[U'\circ\rho_0], \nabla_x p\rangle\,dx \\ &= \left\langle -\,\mathrm{div}\,\left(\rho_0\nabla[U'\circ\rho_0]\right), p\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x\,(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x\,(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x \in \Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$. Según la fórmula (5), si $\mu = \rho\mathcal{L}$,

$$\text{grad}_\mu H = -\operatorname{div}\left(\rho \nabla [U' \circ \rho]\right)$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$. Según la fórmula (5), si $\mu = \rho\mathcal{L}$,

$$\mathrm{grad}_\mu H = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho\nabla[U' \circ \rho]\right) = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho\nabla\,[\ln\rho]\right)$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x\,(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$. Según la fórmula (5), si $\mu = \rho\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U' \circ \rho]\right) = -\operatorname{div}\left(\rho\nabla\left[\ln\rho\right]\right) \\ &= -\operatorname{div}\left(\rho\frac{\nabla\rho}{\rho(x)}\right) \end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x\,(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$. Según la fórmula (5), si $\mu = \rho\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U' \circ \rho]\right) = -\operatorname{div}\left(\rho\nabla\left[\ln\rho\right]\right) \\ &= -\operatorname{div}\left(\rho\frac{\nabla\rho}{\rho(x)}\right) = -\Delta\rho(x). \end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación del calor

Def 5 Notamos $U : x \mapsto x\,(\ln(x) - 1)$. La **entropía** es

$$H(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$. Según la fórmula (5), si $\mu = \rho\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_\mu H &= -\,\mathrm{div}\,\left(\rho\nabla[U'\circ\rho]\right) = -\,\mathrm{div}\,\left(\rho\nabla\left[\ln\rho\right]\right) \\ &= -\,\mathrm{div}\,\left(\rho\frac{\nabla\rho}{\rho(x)}\right) = -\Delta\rho(x). \end{aligned}$$

Entonces $\partial_t\rho - \Delta\rho = 0$ se lee como el flujo de gradiente de la entropía

$$\partial_t\rho = -\mathrm{grad}_{\rho\mathcal{L}} H.$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1}x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\mathrm{grad}_\mu H = -\,\mathrm{div}\left(\rho\nabla[U' \circ \rho]\right)$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1}x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\mathrm{grad}_\mu H = -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U' \circ \rho]\right) = -\frac{m}{m-1}\operatorname{div}\left(\rho\nabla\rho^{m-1}\right)$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1}x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U'\circ\rho]\right) = -\frac{m}{m-1}\operatorname{div}\left(\rho\nabla\rho^{m-1}\right) \\ &= -m\operatorname{div}\left(\rho^{m-1}\nabla\rho\right) \end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1}x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U'\circ\rho]\right) = -\frac{m}{m-1}\operatorname{div}\left(\rho\nabla\rho^{m-1}\right) \\ &= -m\operatorname{div}\left(\rho^{m-1}\nabla\rho\right) = -\operatorname{div}\left(\nabla[\rho^m]\right) \end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x\in\Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1}x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho\nabla[U'\circ\rho]\right) = -\frac{m}{m-1}\operatorname{div}\left(\rho\nabla\rho^{m-1}\right) \\ &= -m\operatorname{div}\left(\rho^{m-1}\nabla\rho\right) = -\operatorname{div}\left(\nabla[\rho^m]\right) = -\Delta\rho^m. \end{aligned}$$

Aplicación: Ecuación en medios porosos

Def 6 Sean $m \neq 1$ y $U : x \mapsto \frac{x^m}{m-1}$. La **densidad de energía** es

$$\mathcal{E}(\mu) := \begin{cases} \int_{x \in \Omega} U\left(\frac{d\mu}{d\mathcal{L}}(x)\right) d\mathcal{L}(x) & \text{si } \mu \ll \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos $U'(x) = \frac{m}{m-1} x^{m-1}$. Según la formula (5), si $\mu \ll \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_\mu H &= -\operatorname{div}\left(\rho \nabla [U' \circ \rho]\right) = -\frac{m}{m-1} \operatorname{div}\left(\rho \nabla \rho^{m-1}\right) \\ &= -m \operatorname{div}\left(\rho^{m-1} \nabla \rho\right) = -\operatorname{div}\left(\nabla [\rho^m]\right) = -\Delta \rho^m. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de los medios porosos $\partial_t \rho - \Delta \rho^m = 0$ se lee

$$\partial_t \rho = -\operatorname{grad}_{\rho\mathcal{L}} \mathcal{E}.$$

Continuará

Este capítulo

- ecuación de continuidad
- nuestra primera definición: distribuciones
- una de las interpretaciones posibles como flujo de gradiente

Continuará

Este capítulo

- ecuación de continuidad
- nuestra primera definición: distribuciones
- una de las interpretaciones posibles como flujo de gradiente

En las aplicaciones, las distribuciones no son muy prácticas. Otras opciones se desarollan para estudiar soluciones de viscosidad y, sobre todo, juegos de campo medio.

Continuará

Este capítulo

- ecuación de continuidad
- nuestra primera definición: distribuciones
- una de las interpretaciones posibles como flujo de gradiente

En las aplicaciones, las distribuciones no son muy prácticas. Otras opciones se desarollan para estudiar soluciones de viscosidad y, sobre todo, juegos de campo medio.

El próximo capítulo

- vínculos entre medidas y variables aleatorias
- definición del lift de Lions

¡Gracias!

[ABS21] Luigi Ambrosio, Elia Brué, and Daniele Semola.
Lectures on Optimal Transport, volume 130 of *UNITEXT*.
Springer International Publishing, Cham, 2021.

[AGS05] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Guiseppe Savaré.
Gradient Flows.
Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser-Verlag, Basel, 2005.

[BF21] Benoît Bonnet and Hélène Frankowska.
Differential inclusions in Wasserstein spaces: The Cauchy-Lipschitz framework.
Journal of Differential Equations, 271:594–637, January 2021.

[FK09] Jin Feng and Markos Katsoulakis.
A Comparison Principle for Hamilton–Jacobi Equations Related to Controlled Gradient Flows in Infinite Dimensions.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 192(2):275–310, May 2009.

[FN12] Jin Feng and Truyen Nguyen.
Hamilton–Jacobi equations in space of measures associated with a system of conservation laws.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 97(4):318–390, April 2012.

[Ott01] Felix Otto.
The Geometry of Dissipative Evolution Equations: The Porous Medium Equation.
Communications in Partial Differential Equations, 26(1-2):101–174, January 2001.

[Pic19] Benedetto Piccoli.
Measure Differential Equations.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 233(3):1289–1317, September 2019.

[Vil09] Cédric Villani.
Optimal Transport, volume 338 of *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften*.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.